流通科学大学論集—経済・情報・政策編—第 27 巻第 2 号，41-53（2019）

貨幣の外部性と自然利子率および期待物価の形成
— 貨幣効用（MIU）を考慮した C-CAPM に基づく考察 —

Inflation Expectations and Natural Rate of Interest in C-CAPM
Considering Consumption Externalities of Money

森澤　龍也*
Tatsuya Morisawa

本稿では、貨幣の外部性を考慮した C-CAPM に基づいて、自然利子率および期待物価変化率の決定メカニズムを考察する。貨幣の外部性が機能している状況では、自然利子率や期待物価変化率は、実物経済や貨幣などの複合的な諸要因によって決定される。他方、貨幣の外部性が機能していない状況では、期待物価変化率は複合的な要因によって決定されるのに対して、自然利子率は基本的に実物経済要因のみによって決定される。
キーワード：C-CAPM、貨幣の外部性、自然利子率、期待物価変化率（期待インフレ率）

Ⅰ．はじめに

本稿では、MIU（money-in-utility）型選好に基づく「消費に基づく資産価格決定モデル（Consumption-based Capital Asset Pricing Model: 以下、C-CAPM と表記）」において、「貨幣の外部性」との関係に焦点を当てた自然利子率および期待物価変化率の決定メカニズムを考察する。

C-CAPM は、代表的家計の動学的行動から得られた最適化条件に基づいて資産収益率（資産価格）の変動を分析するモデルである。Lucas（1978）や Breeden（1979）等によってこのモデルが開発された当初の段階において、その基本構造は新古典派経済学のフレームワークに従って、実物経済における消費の最適化問題として定式化されていた。このため、そのようなモデルの特性上、貨幣の存在や物価変動がモデルのなかで明示的に取り扱われることはなかった。その後、Poterbe and Rotemberg（1987）、Finn, Hoffman and Schlagenhauf（1990）、Holman（1998）、Baba（2000）などによって、C-CAPM のフレームワークに貨幣の存在を明示的に導入するモデルが提示された [1)]。ただし、これらの先行研究は当該モデルの実証分析に主たる関心があり、このモデルが貨幣価値の決定、すなわち、物価の決定にどのような含意をもつのかといった論点については特に考察されてこなかった。

*流通科学大学経済学部、〒651-2188　神戸市西区学園西町 3-1

（2018 年 8 月 27 日受理）
©2019 UMDS Research Association

また、近年の金融政策の在り方を巡って、あらためて自然利子率（中立金利）が注目されるようになっている。日本ではデフレーションからの脱却策、欧米では日本のようなデフレーションに陥らないための予防策として、歴史上類例を見ない大規模な金融緩和政策が実施されている。日本では遂に、2016 年 1 月から、金融機関が保有する日本銀行当座預金の一部に－0.1%のマイナス金利を適用するという、いわゆる「マイナス金利政策」が導入された。このような政策の理論付けとして、自然利子率を用いた次のような論旨が展開された。すなわち、実際の自然利子率がマイナス化しているもとで、政策金利がゼロ以上の水準にある状況は金融を引き締めているに等しく、負の自然利子率に合わせて実際の金利をマイナス方向に誘導し、デフレ脱却を実現しなければならない、といった見解である [2)]。自然利子率に改めて焦点が当てられるようになった背景には、以上のような事情がある。ただし、C-CAPM のフレームワークを用いた自然利子率の議論はこれまでのところほとんど見当たらないようである。

以上に鑑みて、本稿では、MIU 型選好を考慮した C-CAPM に基づいて、自然利子率および貨幣価値の決定構造を経済理論的に明らかにする。ここで、MIU 型効用関数とは、消費 c_t からの効用に加えて、貨幣 m_t からの効用を考慮した $u(c_t, m_t)$のような時点効用関数のことである。例えば、$u(c_t, m_t) = u(c_t) + v(m_t)$ のように消費と貨幣が加法分離的な関数型は数学的に取り扱いやすいため、マクロ動学分析においてよく用いられる [3)]。ただし、このような加法分離的な MIU 型選好は、消費と貨幣の交差微分 $u_{mc}(c_t, m_t)$がゼロであると暗黙の裡に想定している。

より一般的に、消費と貨幣の交差微分 $u_{mc}(c_t, m_t)$がゼロではない状況とは、貨幣が消費の限界効用に影響を及ぼしており、貨幣が消費の外部性（consumption externalities）として機能していることを意味している。本稿ではこの効果を「貨幣の外部性（consumption externalities of money）」と呼ぶ。ここで浮かぶひとつの素朴な疑問は、このような貨幣の外部性が自然利子率や物価期待の形成にどのような影響を及ぼすのか、ということである。そこで本稿では、特定の関数型に依らず一般的な関数型のもとで、貨幣の外部性が機能する場合としない場合について場合分けを行い、両方のケースを比較することで、自然利子率および期待物価変化率の決定メカニズムを考察する。

具体的な分析に先立ち、本稿の分析結果を簡潔に要約すると、次のようになる。貨幣の外部性が機能している状況（$u_{mc}(c_t, m_t) \neq 0$）のもとでは、自然利子率や期待物価変化率は、実物経済および貨幣などの複合的な諸要因によって決定される。一方で、貨幣の外部性が機能していない状況（$u_{mc}(c_t, m_t) = 0$）のもとでは、期待物価変化率は複合的な要因によって決定されるのに対して、自然利子率は貨幣とは中立的に決定される。

本稿の構成は次の通りである。第Ⅱ節では、貨幣の存在を明示的に組み込んだ C-CAPM を定式化する。その際、Baba (2000)に従い、最適化の操作変数として、消費・資産保有量については実質変数、貨幣保有量については名目変数を用いる。第Ⅲ節では、このモデルから自然利子率（均衡実質利子率）および期待物価変化率（均衡貨幣収益率）の決定メカニズムを導出する。また、

貨幣の外部性に関する選好パラメータの定式化を提示する。第Ⅳ節では、貨幣の外部性が機能する場合と機能しない場合について比較しながら、自然利子率および物価期待の決定要因について考察する。第Ⅴ節では、本稿の議論をまとめる。

Ⅱ．基本モデル

本節では、C-CAPM のフレームワークを用いて、均衡実質利子率および貨幣価値決定問題を定式化し、その含意を考察するための基本モデルを提示する。以下のモデルの定式化で用いられる記号は下記の通りである。すなわち、ρ（$\in(0,\infty)$; 定数）：時間選好率、$\beta\equiv 1/(1+\rho)$ （$\beta\in(0,1)$; 定数）：主観的割引率、c_t：t 期における家計の実質消費、b_t：t 期初（t-1 期末）における家計の実質債券保有量、M_t：t 期初（t-1 期末）における家計の名目貨幣（流動性）保有量、P_t：t 期における一般物価水準、$m_t=M_t/P_t$：t 期初（t-1 期末）における家計の実質貨幣保有量、w_t：t 期における家計の非資産所得（実質賃金）、r_t：t 期における実質債券利回り（実質利子率）、r_n：自然利子率（中立金利）、$E_t(\bullet)$：t 期において利用可能な情報集合に基づく条件付期待値演算子、$g_{x,t}\equiv x_t/x_{t-1}-1$：$t$ 期における変数 x_t の変化率、である。

また、本分析では、時点効用関数として、貨幣効用を考慮した MIU 型の関数 $u(c_t, m_t)$ を用いる。なお、限界効用などの効用導関数の表記および符号条件については、

$u_c(c_t, m_t)\equiv\partial u(c_t, m_t)/\partial c_t>0,\ u_{cc}(c_t, m_t)\equiv\partial^2 u(c_t, m_t)/[\partial c_t]^2<0,$

$u_{ccc}(c_t, m_t)\equiv\partial^3 u(c_t, m_t)/[\partial c_t]^3>0$,

$u_m(c_t, m_t)\equiv\partial u(c_t, m_t)/\partial m_t>0,\ u_{mm}(c_t, m_t)\equiv\partial^2 u(c_t, m_t)/[\partial m_t]^2<0,$

$u_{mmm}(c_t, m_t)\equiv\partial^3 u(c_t, m_t)/[\partial m_t]^3>0,$

$u_{mc}(c_t, m_t)\equiv\partial^2 u(c_t, m_t)/[\partial m_t\,\partial c_t]>0,\ u_{mmc}(c_t, m_t)\equiv\partial^3 u(c_t, m_t)/\{[\partial m_t]^2\,\partial c_t\}>0,$

$u_{mcc}(c_t, m_t)\equiv\partial^3 u(c_t, m_t)/\{\partial m_t\,[\partial c_t]^2\}<0,$

と定義する。

それでは、C-CAPM の基本的な枠組みに沿って、MIU 型の選好関係 $u(c_t, m_t)$ に基づき、代表的家計モデルの枠組みのもとで、資産価格および貨幣価値の決定問題を定式化しよう。すなわち、予算制約

$$b_{t+1}+\frac{M_{t+1}}{P_t}=(1+r_t)b_t+\frac{M_t}{P_t}+w_t-c_t \tag{1}$$

のもとで、代表的家計は現在（0 期）から将来にかけての消費と貨幣保有（流動性）から得られる期待効用の割引現在価値

$$E_0\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u\left(c_t,\frac{M_t}{P_t}\right)\right\} \tag{2}$$

が最大になるように消費と資産（債券・貨幣）保有を選択するものと考える。

このモデルでは完全競争市場を想定している。すなわち、一般物価水準については個々の経済主体にとって所与であるという経済のもとで、家計は、実物市場で取引される消費・資産（債券）については、実質ベースで消費量・資産（債券）保有量を選択し、貨幣市場から名目量（貨幣単位）で供給される貨幣量については、名目ベースで選択するものと考える。換言すれば、最適化の操作変数として、消費・資産保有量については実質変数、貨幣保有量については名目変数を用いる [4)]。以上の設定のもとで、代表的家計の期待効用の割引現在価値に関する最大化問題を定式化すると、次の数学的問題になる。

$$\max_{c_t, b_{t+1}, M_{t+1},} \quad E_0\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u\left(c_t, \frac{M_t}{P_t}\right)\right\}$$

$$s.t. \quad b_{t+1} + \frac{M_{t+1}}{P_t} = (1+r_t)b_t + \frac{M_t}{P_t} + w_t - c_t$$

この最適化問題における一階の条件は、以下のようになる。

$$c_t: \quad u_c(c_t, m_t) = \lambda_t \quad \text{for } t \in [0,\infty) \tag{3}$$

$$b_{t+1}: \quad E_t[\,\lambda_t - \beta\,\lambda_{t+1}(1 + r_{t+1})\,] = 0 \quad \text{for } t \in [0,\infty) \tag{4}$$

$$M_{t+1}: \quad E_t\{\,\lambda_t\,(P_t)^{-1} - \beta\,[\,\lambda_{t+1} + u_m(c_{t+1}, m_{t+1})\,]\,(P_{t+1})^{-1}\,\} = 0 \quad \text{for } t \in [0,\infty) \tag{5}$$

ただし、λ_t：ラグランジュ乗数、である。

（3）式と（4）式から、

$$E_t\,\{\,\beta[\,u_c(c_{t+1}, m_{t+1}) / u_c(c_t, m_t)\,]\,(1 + r_{t+1}) - 1\,\} = 0 \quad \text{for } t \in [0,\infty) \tag{6}$$

が導出される。同様に、(3)式と(5)式から、

$$E_t\,\{\,\beta[\,u_c(c_t, m_t)\,]^{-1}\,[\,u_c(c_{t+1}, m_{t+1}) + u_m(c_{t+1}, m_{t+1})\,]\,(1 + g_{p,\,t+1})^{-1} - 1\,\} = 0 \quad \text{for } t \in [0,\infty) \tag{7}$$

が求められる。ただし、$g_{p,t+1} \equiv P_{t+1} / P_t - 1$：物価変化率（インフレ率）である。

（6）式および（7）式はオイラー方程式（Euler equation）と呼ばれている。（6）式は均衡資産収益率（均衡資産価格）の決定式であり、ここでは（7）式との区別のため、消費のオイラー方程式と呼ぶ。一方、（7）式は均衡貨幣収益率（均衡貨幣価値）の決定式であり、ここでは（6）式との区別のため、貨幣（流動性）のオイラー方程式と呼ぶ。周知のように、貨幣価値と物価は表裏の関係にあるので、貨幣のオイラー方程式とは詰まる所、C-CAPM の文脈における均衡物価変化率（インフレ率）の決定式といえる。ここで、（6）式および（7）式における確率的割引要素 Π^c_{t+1}, Π^m_{t+1} は次のようになる。

$$\Pi^c_{t+1} = \beta[\,u_c(c_{t+1}, m_{t+1}) / u_c(c_t, m_t)\,]$$

$$\Pi^m_{t+1} = \beta[\,u_c(c_{t+1}, m_{t+1}) / u_c(c_t, m_t)\,]\,(1 + l_{t+1})$$

ただし、

$$l_{t+1} \equiv u_m(c_{t+1}, m_{t+1}) / u_c(c_{t+1}, m_{t+1}) \tag{8}$$

は小野（1992）の流動性プレミアムである。流動性プレミアム（8）式は、家計の保有する貨幣が

もたらす限界効用を、消費の限界効用で基準化したものであり、貨幣がもたらす流動性サービスの心理的対価に相当する。したがって、貨幣のオイラー方程式（7）式における割引要素は、（6）式における均衡資産価格（均衡資産収益率）の割引要素に粗流動性プレミアムを乗じたものになっている。これらをまとめると、均衡貨幣価値（均衡物価変化率）は、均衡資産価格の確率的割引要素、および、流動性プレミアムによって決定される。

Ⅲ．自然利子率と貨幣価値（期待インフレ率）の決定構造

1．自然利子率（均衡実質利子率）の決定メカニズム

消費のオイラー方程式（6）式は、新古典派成長理論に沿って、消費および資産供給の経路が与えられたもとでの均衡実質利子率の決定式と解釈することができる。換言すれば、（6）式によって決定される実質利子率は、いわゆる自然利子率（中立金利）に相当するといえる。したがって、（6)式を自然利子率に関するオイラー方程式として書き換えると､次のように表すことができる。

$$E_t[\, u_c(c_{t+1}, m_{t+1}) / u_c(c_t, m_t)\,]\,(1 + r_n)(1 + \rho)^{-1} = 1 \quad \text{for } t \in [0,\infty) \tag{9}$$

ただし、r_n：自然利子率（中立金利)、である。

この（9）式を自然利子率 r_n で整理し直したオイラー方程式

$$r_n = (1 + \rho)\, E_t\{\, [\, u_c(c_{t+1}, m_{t+1}) / u_c(c_t, m_t)\,]^{-1} \} - 1$$

についてテイラー展開すると、次のような近似的関係が得られる [5)]。

$$r_n \approx \rho + \gamma_{c,t}\, E_t(g_{c,t+1}) - 0.5\, \gamma_{c,t}\, \varepsilon_{c,t}\, Var_t(g_{c,t+1})$$
$$- \omega_t\, E_t(g_{m,t+1}) - 0.5\, \omega_t\, \varphi_t\, Var_t(g_{m,t+1}) + \gamma_{c,t}\, \eta_t\, Cov_t(g_{c,t+1}, g_{m,t+1}) \tag{10}$$

ただし、$Var_t(\cdot)$：t 期において利用可能な情報集合に基づく条件付分散演算子、$Cov_t(\cdot)$：t 期において利用可能な情報集合に基づく条件付共分散演算子、である。また、（10）式における $\gamma_{c,t}, \varepsilon_{c,t}, \omega_t, \varphi_t, \eta_t$ は弾力性概念によって以下のように定義された選好パラメータである。

$$\gamma_{c,t} \equiv - u_{cc}(c_t, m_t)\, c_t / u_c(c_t, m_t) > 0 \tag{11}$$

$$\varepsilon_{c,t} \equiv - u_{ccc}(c_t, m_t)\, c_t / u_{cc}(c_t, m_t) > 0 \tag{12}$$

$$\omega_t \equiv u_{mc}(c_t, m_t)\, m_t / u_c(c_t, m_t) > 0 \tag{13}$$

$$\varphi_t \equiv u_{mmc}(c_t, m_t)\, m_t / u_{mc}(c_t, m_t) > 0 \tag{14}$$

$$\eta_t \equiv u_{mcc}(c_t, m_t)\, m_t / u_{cc}(c_t, m_t) > 0 \tag{15}$$

$\gamma_{c,t}$ は Arrow（1951）と Pratt（1964）の相対的危険回避度(relative risk aversion)であり、効用関数の曲率によって消費者の危険回避度を測る尺度である。一方、$\varepsilon_{c,t}$ は Kimball（1990）の相対的慎重度（相対的プルーデンス; relative prudence）であり、効用関数の 3 階微分を用いることによって将来の消費変動の不確実性に伴う予備的貯蓄動機を測る尺度である [6)]。ここでは、後述の選好パラメータとの区別のため、$\gamma_{c,t}$ を消費の相対的危険回避度、$\varepsilon_{c,t}$ を消費の相対的慎重度と呼ぶ。

$\gamma_{c,t}$ や $\varepsilon_{c,t}$ が消費者の危険回避行動や予備的貯蓄に関する選好パラメータであるのに対して、$\omega_t, \varphi_t,$

η_t は貨幣の外部効果に関する選好パラメータである。消費と貨幣の交差微分 $u_{mc}(c_t, m_t)$は、「消費の限界効用」の貨幣による導関数であり、実質貨幣の変化が消費の外部性として機能している状況を表している。したがって、実質貨幣残高 1%の変化に対する消費の限界効用の変化率である ω_t は、貨幣の外部性を表す選好パラメータである。そして、φ_t や η_t はより高次の効用導関数を用いた貨幣の外部性パラメータである。すなわち、φ_t は実質貨幣残高 1%の変化に対する交差微分 $u_{mc}(c_t, m_t)$の変化率を表し、η_t は実質貨幣残高 1%の変化に対する効用関数の消費に関する 2 階微分（効用関数の上方への張り出し方、すなわち、消費者の危険回避度）の変化率を表す。ただし、$\omega_t, \varphi_t, \eta_t$ のいずれのパラメータについても、$u_{mc}(c_t, m_t) \neq 0$ のもとで成立しているということが重要な点である。逆にいえば、時点効用関数において、貨幣の外部性を考慮しない場合は、$\omega_t, \varphi_t, \eta_t$ のいずれのパラメータについても定義することはできない。この点は後程、本稿の議論に大きく関わるポイントである。

２．貨幣価値（期待インフレ）の決定メカニズム

第Ⅱ節での議論より、貨幣のオイラー方程式（7）式は、この経済における物価変化率（インフレ率）の決定式である。本節では、前節にて消費のオイラー方程式（6）式から自然利子率の決定メカニズム（10）式を導出した方法を用いて、C-CAPM における物価変化率の決定メカニズムを定式化する。（7）式を下記のように書き換えたオイラー方程式

$$E_t \{ [u_c(c_t, m_t)]^{-1} [u_m(c_{t+1}, m_{t+1}) + u_c(c_{t+1}, m_{t+1})] (1 + g_{p,t+1})^{-1} \} (1 + \rho)^{-1} = 1$$

についてテイラー展開すると、次のような近似的関係が得られる[7)]。

$$\begin{aligned} E_t(g_{p,t+1}) \approx\ & Var_t(g_{p,t+1}) - \rho \\ & + (1 + l_t)^{-1} \{ - [\gamma_{c,t} - \omega_t (c_t / m_t)] E_t(g_{c,t+1}) + 0.5\, \gamma_{c,t} [\varepsilon_{c,t} - \eta_t (c_t / m_t)] Var_t(g_{c,t+1}) \\ & \quad - (\gamma_{m,t} l_t - \omega_t) E_t(g_{m,t+1}) + 0.5 (\gamma_{m,t} \varepsilon_{m,t} l_t + \omega_t \varphi_t) Var_t(g_{m,t+1}) \\ & \quad + [\omega_t \varphi_t (c_t / m_t) - \gamma_{c,t} \eta_t] Cov_t(g_{c,t+1}, g_{m,t+1}) \\ & \quad + (\gamma_{m,t} l_t - \omega_t) Cov_t(g_{m,t+1}, g_{p,t+1}) + [\gamma_{c,t} - \omega_t (c_t / m_t)] Cov_t(g_{c,t+1}, g_{p,t+1}) \} \end{aligned} \tag{16}$$

ただし、

$$\gamma_{m,t} \equiv - u_{mm}(c_t, m_t)\, m_t / u_m(c_t, m_t) > 0 \tag{17}$$

$$\varepsilon_{m,t} \equiv - u_{mmm}(c_t, m_t)\, m_t / u_{mm}(c_t, m_t) > 0 \tag{18}$$

である。（11）-（12）式との区別のため、ここでは $\gamma_{m,t}$ を貨幣の相対的危険回避度、$\varepsilon_{m,t}$ を貨幣の相対的慎重度と呼ぶ。（16）式はこの経済における期待物価変化率（期待インフレ率）の決定メカニズムを表している。物価期待の形成要因については、次節以降にて詳細に検討する。

Ⅳ．長期的な自然利子率および期待物価の形成要因と貨幣の外部性

１．貨幣の外部性が機能している状況のもとでの長期的関係

本節では、長期にわたる自然利子率および期待物価変化率の決定構造について考察する。具体的なモデルの展開に先立ち、家計の期待形成および確率構造に関して次の仮定を置く。

仮定 1： 家計は物価動向に関する期待（予想）を合理的に形成する。

$$E_t(g_{p,t+1}) = E(g_p) \equiv g^e{}_p \qquad (19)$$

仮定 2： 消費貨幣比率 c_t / m_t は長期的に定数 α に収斂する。

$$E(c_t / m_t) = \alpha \qquad (20)$$

仮定 3： 家計の金利期待（予想）は長期的に自然利子率 r_n と等しくなるように形成される。

$$E_t(r_{t+1}) = E(r) = r_n \qquad (21)$$

仮定 4： 選好パラメータは長期的に定数に収斂する。

$$\gamma_{c,t} = \gamma_c\ ,\ \varepsilon_{c,t} = \varepsilon_c\ ,\ \gamma_{m,t} = \gamma_m\ ,\ \varepsilon_{m,t} = \varepsilon_m\ ,\ \omega_t = \omega\ ,\ \varphi_t = \varphi\ ,\ \eta_t = \eta,\ l_t = l. \qquad (22)$$

仮定 5： 情報集合 $\Omega_t \equiv \{g_{c,t}, g_{m,t}, g_{p,t}, (c_t / m_t)\}_{t=0}^{\infty}$ の各要素は i.i.d.（互いに統計的に独立）である。

以上の諸仮定および $u_{mc}(c_t, m_t) \neq 0$ のもとで、（10）式および（16）式について非条件付期待値をとると、長期的な自然利子率および期待物価変化率の決定メカニズムは以下のように成立する。

$$r_n \approx \rho + \gamma_c\, E(g_c) - 0.5\, \gamma_c\, \varepsilon_c\, Var(g_c) - \omega\, E(g_m) - 0.5\, \omega\, \varphi\, Var(g_m) + \gamma_c\, \eta\, Cov(g_c, g_m) \qquad (23)$$

$$\begin{aligned} g^e{}_p \approx Var(g_p) - \rho + (1 + l)^{-1} [& - (\gamma_c - \omega\, \alpha)\, E(g_c) + 0.5\, \gamma_c\, (\varepsilon_c - \eta\, \alpha)\, Var(g_c) \\ & - (\gamma_m\, l - \omega)\, E(g_m) + 0.5\, (\gamma_m\, \varepsilon_m\, l + \omega\, \varphi)\, Var(g_m) \\ & + (\omega\, \varphi\, \alpha - \gamma_c\, \eta)\, Cov(g_c, g_m) \\ & + (\gamma_m\, l - \omega)\, Cov(g_m, g_p) + (\gamma_c - \omega\, \alpha)\, Cov(g_c, g_p) \,] \end{aligned} \qquad (24)$$

ただし、$E(\cdot)$：（非条件付）期待値演算子、$Var(\cdot)$：（非条件付）分散演算子、$Cov(\cdot)$：（非条件付）共分散演算子、である。

（23）式はこの経済における自然利子率の決定メカニズムを表している。すなわち、自然利子率の決定要因は、

①時間選好率（プラス要因）：

$$\partial r_n / \partial \rho = 1 > 0$$

②実物経済要因（期待消費成長率：プラス要因、消費変動のボラティリティ：マイナス要因）：

$$\partial r_n / \partial E(g_c) = \gamma_c > 0$$

$$\partial r_n / \partial Var(g_c) = -\,0.5\, \gamma_c\, \varepsilon_c < 0$$

③貨幣要因（期待貨幣成長率・貨幣変動のボラティリティ：マイナス要因）：

$$\partial r_n / \partial E(g_m) = -\,\omega < 0$$

$\partial r_n / \partial Var(g_m) = -\,0.5\ \omega\ \varphi < 0$

④実物経済と貨幣の相関関係（プラス要因）：

$\partial r_n / \partial Cov(g_c, g_m) = \gamma_c\ \eta > 0$

から成ることがわかる。

一方で、(24) 式はこの経済における期待物価変化率の形成メカニズムを表している。なお、(24) 式は（23）式を用いると次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} g^e{}_p \approx\ & Var(g_p) + (1 + l)^{-1}\ [\,-\,l\ \rho - r_n + \omega\ \alpha\ E(g_c) - 0.5\ \gamma_c\ \eta\ \alpha\ Var(g_c) \\ & - \gamma_m\ l\ E(g_m) + 0.5\ \gamma_m\ \varepsilon_m\ l\ Var(g_m) + \omega\ \varphi\ \alpha\ Cov(g_c, g_m) \\ & + (\gamma_m\ l - \omega)\ Cov(g_m, g_p) + (\gamma_c - \omega\ \alpha)\ Cov(g_c, g_p)\ ] \end{aligned} \tag{24'}$$

すなわち、$g^e{}_p$ の決定構造には、自然利子率の決定要因が同時に組み込まれている。(24') 式より、自然利子率が期待物価変化率に与える直接的な影響は、

$\partial g^e{}_p / \partial r_n = -\,(1 + l)^{-1} < 0$

のように、粗流動性プレミアムの逆数分だけマイナスの影響を及ぼすことがわかる [8)]。この事実は、自然利子率の変化に即応させた金融緩和を実施した場合、その効果として期待インフレを発生させることが可能であるということを含意している。ただし、経済には実物要因や貨幣要因が複雑に絡み合っているため、各要因の変化は、直接的な影響のみならず、自然利子率を通じた間接的な影響と合わせた複合的な効果として、期待インフレに影響を及ぼすと考えられる。この点に注意しながら、期待物価変化率の形成要因をみていくと、

①時間選好率（マイナス要因）：

$\partial g^e{}_p / \partial \rho = -\,(1 + l)^{-1}\ (\partial r_n / \partial \rho + l) = -\,(1 + l)^{-1}\ (1 + l) = -\,1 < 0$

②実物経済要因（期待消費成長率：自然利子率を通じた間接効果＝マイナス要因・直接効果＝プラス要因、消費変動のボラティリティ：自然利子率を通じた間接効果＝プラス要因、直接効果＝マイナス要因）：

$\partial g^e{}_p / \partial E(g_c) = -\,(1 + l)^{-1}\ [\ \partial r_n / \partial E(g_c) - \omega\ \alpha\ ] = -\,(1 + l)^{-1}\ (\gamma_c - \omega\ \alpha)$

$\partial g^e{}_p / \partial Var(g_c) = -\,0.5\ (1 + l)^{-1}\ [\partial r_n / \partial Var(g_c) + \gamma_c\ \eta\ \alpha] = 0.5\ (1 + l)^{-1}\ \gamma_c\ (\varepsilon_c - \eta\ \alpha)$

③貨幣要因（期待貨幣成長率：自然利子率を通じた間接効果＝プラス要因・直接効果＝マイナス要因、貨幣変動のボラティリティ：自然利子率を通じた間接効果・直接効果＝プラス要因）：

$\partial g^e{}_p / \partial E(g_m) = -\,(1 + l)^{-1}\ [\partial r_n / \partial E(g_m) + \gamma_m\ l] = (1 + l)^{-1}\ (\omega - \gamma_m\ l)$

$\partial g^e{}_p / \partial Var(g_m) = -\,0.5\ (1 + l)^{-1}\ [\partial r_n / \partial Var(g_m) - \gamma_m\ \varepsilon_m\ l] = 0.5\ (1 + l)^{-1}\ (\omega\ \varphi + \gamma_m\ \varepsilon_m\ l) > 0$

④実物経済と貨幣の相関関係（自然利子率を通じた間接効果＝マイナス要因・直接効果＝プラス要因）：

$\partial g^e{}_p / \partial Cov(g_c, g_m) = -\,(1 + l)^{-1}\ [\partial r_n / \partial Cov(g_c, g_m) - \omega\ \varphi\ \alpha] = -\,(1 + l)^{-1}\ (\gamma_c\ \eta - \omega\ \varphi\ \alpha)$

⑤物価期待の自己実現要因（物価変動のボラティリティ：プラス要因）：

$\partial g^e_p / \partial Var(g_p) = 1 > 0$

⑥貨幣要因と物価の相関関係（符号不定…③期待貨幣成長率の係数と連動）：

$\partial g^e_p / \partial Cov(g_m, g_p) = (1 + l)^{-1} (\gamma_m\, l - \omega)$

⑦実物要因と物価の相関関係（符号不定…②期待消費成長率の係数と連動）：

$\partial g^e_p / \partial Cov(g_c, g_p) = (1 + l)^{-1} (\gamma_c - \omega\, \alpha)$

から成る。すなわち、「②実物経済要因」（⇔「⑦実物要因と物価の相関関係」）、「③貨幣要因」（⇔「⑥貨幣要因と物価の相関関係」）や「④実物経済と貨幣の相関関係」の符号関係は、直接効果と自然利子率を通じた間接効果の大小関係によって左右される。

２．貨幣の外部性が機能しない状況での自然利子率およびインフレ期待形成

前節までの議論では、貨幣の外部性が機能する状況（$u_{mc}(c_t, m_t) \neq 0$）のもとでの自然利子率および期待物価変化率の決定メカニズムを考察してきた。本節では、貨幣の外部性が機能しない状況（$u_{mc}(c_t, m_t) = 0$）のもとで自然利子率および期待物価変化率の決定メカニズムがどのようなものになるのかをみていく。$u_{mc}(c_t, m_t) = 0$ が成り立つ状況とは、①時点効用関数の独立変数が消費のみから成るケース（$u(c_t)$：要するに貨幣効用を考慮しない通常のケース）、②MIU 型時点効用関数において消費と貨幣が加法分離的に取り扱われているケース（例えば、$u(c_t, m_t) = u(c_t) + v(m_t)$）、という両方の場合を含んでいる。このような状況下では、貨幣の外部効果パラメータについて、

$$\omega = \varphi = \eta = 0 \qquad (25)$$

が成立することを意味する。このとき、（23）式および（24）式は次のようになる。

$$r_n \approx \rho + \gamma_c\, E(g_c) - 0.5\, \gamma_c\, \varepsilon_c\, Var(g_c) \qquad (26)$$

$$\begin{aligned} g^e_p \approx\ & Var(g_p) - \rho + (1 + l)^{-1} [- \gamma_c\, E(g_c) + 0.5\, \gamma_c\, \varepsilon_c\, Var(g_c) - \gamma_m\, l\, E(g_m) + 0.5\, \gamma_m\, \varepsilon_m\, l\, Var(g_m) \\ & + \gamma_m\, l\, Cov(g_m, g_p) + \gamma_c\, Cov(g_c, g_p)] \qquad (27) \\ =\ & Var(g_p) + (1 + l)^{-1} [- l\, \rho - r_n - \gamma_m\, l\, E(g_m) + 0.5\, \gamma_m\, \varepsilon_m\, l\, Var(g_m) \\ & + \gamma_m\, l\, Cov(g_m, g_p) + \gamma_c\, Cov(g_c, g_p)] \end{aligned}$$

（26）式は $u_{mc}(c_t, m_t) = 0$ のもとでの自然利子率の決定メカニズムを表している。この場合、自然利子率の決定要因は、

①時間選好率（プラス要因）：

$\partial r_n / \partial \rho = 1 > 0$

②実物経済要因（期待消費成長率：プラス要因、消費変動のボラティリティ：マイナス要因）：

$\partial r_n / \partial E(g_c) = \gamma_c > 0$

$\partial r_n / \partial Var(g_c) = - 0.5\, \gamma_c\, \varepsilon_c < 0$

から成る。すなわち、貨幣の外部性が機能しない状況下では、貨幣要因（期待貨幣成長率・貨幣

変動のボラティリティ）は自然利子率の決定に一切影響を与えず、基本的に実物経済要因（期待消費成長率・消費変動のボラティリティ）が自然利子率決定の鍵を握っていることになる。

一方で、（27）式は $u_{mc}(c_t, m_t) = 0$ のもとでの期待物価変化率の形成メカニズムを表している。この場合においても、$g^e{}_p$ の決定構造には、自然利子率の決定要因が同時に組み込まれているため、自然利子率が期待物価変化率に与える直接的な影響は、前節と同様に、粗流動性プレミアムの逆数分だけマイナスの影響を及ぼす。したがって、各要因の変化は、直接的な影響に加えて、自然利子率を通じた間接的な影響と合わせた複合的な効果として、期待インフレに影響を及ぼすことから、期待物価変化率の形成要因は、

①時間選好率（マイナス要因）：

$\partial g^e{}_p / \partial \rho = -(1 + l)^{-1} (\partial r_n / \partial \rho + l) = -(1 + l)^{-1} (1 + l) = -1 < 0$

②実物経済要因（期待消費成長率：自然利子率を通じた間接効果＝マイナス要因、消費変動のボラティリティ：自然利子率を通じた間接効果＝プラス要因）：

$\partial g^e{}_p / \partial E(g_c) = -(1 + l)^{-1} [\, \partial r_n / \partial E(g_c) \,] = -(1 + l)^{-1} \gamma_c < 0$

$\partial g^e{}_p / \partial Var(g_c) = -0.5\,(1 + l)^{-1} [\, \partial r_n / \partial Var(g_c) \,] = 0.5\,(1 + l)^{-1} \gamma_c\, \varepsilon_c > 0$

③貨幣要因（期待貨幣成長率：直接効果＝マイナス要因、貨幣変動のボラティリティ：直接効果＝プラス要因）：

$\partial g^e{}_p / \partial E(g_m) = -(1 + l)^{-1} \gamma_m\, l < 0$

$\partial g^e{}_p / \partial Var(g_m) = 0.5\,(1 + l)^{-1} \gamma_m\, \varepsilon_m\, l > 0$

④実物経済と貨幣の相関関係（効果消滅）：

⑤物価期待の自己実現要因（物価変動のボラティリティ：プラス要因）：

$\partial g^e{}_p / \partial Var(g_p) = 1 > 0$

⑥貨幣要因と物価の相関関係（プラス要因…③期待貨幣成長率の係数と連動）：

$\partial g^e{}_p / \partial Cov(g_m, g_p) = (1 + l)^{-1} \gamma_m\, l > 0$

⑦実物要因と物価の相関関係（プラス要因…②期待消費成長率の係数と連動）：

$\partial g^e{}_p / \partial Cov(g_c, g_p) = (1 + l)^{-1} \gamma_c > 0$

から成る。すなわち、貨幣の外部性が機能しない状況においては、各要因の符号条件はパラメータに関する仮定のもとで確定するものの、「④実物経済と貨幣の相関関係」に関してはその効果自体が消滅してしまうことがわかる。

Ⅴ．おわりに

本稿では、MIU 型選好に基づく C-CAPM において、貨幣の外部性が機能する状況としない状況について場合分けしながら、自然利子率および期待物価変化率の決定メカニズムを考察した。本稿の分析結果をまとめると、次のように整理される。

第 1 に、貨幣の外部性が機能している状況（$u_{mc}(c_t, m_t) \neq 0$）のもとでは、自然利子率や期待物価変化率は、実物経済面や貨幣面などの複合的な諸要因によって決定される。ただし、この場合の期待物価変化率の決定メカニズムでは、各要因の変化に対する直接効果と、自然利子率を通じた間接効果から成る複合的な符号関係が混在するため、実物経済要因および貨幣要因に関する符号条件は確定しない。

第 2 に、期待物価変化率の決定メカニズムには、自然利子率が組み込まれている。このため、自然利子率の上昇（低下）が期待物価変化率に与える直接的な影響は、粗流動性プレミアムの逆数分だけマイナス（プラス）の影響を及ぼす。この結果は貨幣の外部性の想定に依存することなく成立する。極端なケースとして、MIU 型ではなく通常の消費のみから成る時点効用関数の場合においても起こり得る結果である。

第 3 に、貨幣の外部性が機能していない状況（$u_{mc}(c_t, m_t) = 0$）のもとでは、期待物価変化率は実物経済・貨幣などの複合的な要因によって決定されるのに対して、自然利子率は基本的に実物経済要因のみによって決定される。すなわち、貨幣の外部性が機能していない経済を想定した場合、貨幣要因は自然利子率の決定に対して中立的である。このため、物価期待形成における貨幣要因の波及経路については、自然利子率を通じた間接効果が消滅し、直接効果（流動性としての貨幣価値効果）のみが機能することになる。ただし、この場合、各要因の符号条件はパラメータに関する仮定のもとで確定する。

したがって、貨幣の外部性が機能していない状況では、各要因の物価期待形成への波及経路は見通しのよいものになっているといえる。ただし、この場合、貨幣量の伸び（$E(g_m) > 0$）が予想されているもとで、デフレ期待の長期化（$\partial g^e_p / \partial E(g_m) = -(1 + l)^{-1} \gamma_m l < 0$）を説明することはできるものの、貨幣が自然利子率の決定に対して中立的であるため、貨幣量の成長期待（$E(g_m) > 0$）によって低金利の長期化を説明することはできない。

本稿執筆時点（2018 年 8 月）における日本経済の現状に鑑みて、大規模な金融緩和による貨幣成長予想のもと、デフレ期待と低金利の同時的長期化が説明可能であるようなモデル構造が求められている。そこで、貨幣の外部性が機能しているもとで、貨幣量の増加期待が自然利子率を通じて与える間接効果（$-(1 + l)^{-1} [\partial r_n / \partial E(g_m)] = (1 + l)^{-1} \omega > 0$：インフレ期待効果）が、貨幣増加期待の直接効果（$-(1 + l)^{-1} \gamma_m l < 0$：デフレ期待効果）を下回る状況を考える。この場合、貨幣量の伸び（$E(g_m) > 0$）が予想されているときに、デフレ期待（$\partial g^e_p / \partial E(g_m) = (1 + l)^{-1} (\omega - \gamma_m l) < 0$）と低金利期待（$\partial r_n / \partial E(g_m) = -\omega < 0$）が同時に成立し得ることを説明できる。

以上の結果は、特定の関数型に依らず一般的な関数型のもとで導出されたものである。逆にいえば、実証可能なパラメトリックなモデルで定式化されておらず、このままでは実際のデータを用いた実証分析に適用できないともいえる。特に、貨幣の外部性が機能している状況では、各要因の物価期待形成への符号関係は、各要因からの直接効果と自然利子率を通じた間接効果の大小

関係に依っているため、実際の経済データによってどのような波及経路が機能しているのかについて確かめる必要がある。この残された実証的課題については、稿を改めて取り組みたい。

引用文献、注

1）　厳密にいえば、Poterbe and Rotemberg（1987）は、C-CAPMの研究としてではなく、貨幣需要関数研究の延長線としてなされたものである。ただし、彼らによって導出されたモデルはC-CAPMにおける定式化とほぼ同値であり、ここでは彼らの研究も貨幣を組み込んだC-CAPMの先行研究として紹介している。

2）　マイナス金利政策を巡る議論の詳細については、岩田・左三川（2016）を参照されたい。

3）　例えば、小野（1992）や加藤（2007）等を参照されたい。

4）　このような取り扱いは、Baba（2000）に基づいている。

5）　（10）式の導出にあたって、ρ については原点周りで1次の展開、c_{t+1} については c_t の周りで2次の展開、m_{t+1} については m_t の周りで2次の展開を行っている。また、$[E_t(g_{x,t+1})]^2 \approx 0$ と仮定して、$E_t(g_{x,t+1}{}^2)$を $Var_t(g_{x,t+1})$に置き換え、$E_t(g_{x,t+1})\ E_t(g_{y,t+1}) \approx 0$ と仮定し、$E_t(g_{x,t+1}\ g_{y,t+1})$を $Cov_t(g_{x,t+1}\ g_{y,t+1})$に置き換えている。なお、この導出に当たって、齊藤（2006）の第3章における導出過程を参考にしている。また、本稿における将来の状態に関する情報と条件付け（条件付期待値）の取り扱いに関しては、Shreve（2004*a*, §2.3）およびShreve（2004*b*, §2.3）における確率論的基礎付けに基づいている。

6）　予備的貯蓄と効用関数の形状（3階の導関数）との関係については、Romer（2006, §7.6）を参照されたい。

7）　（16）式の導出にあたって、ρ については原点周りで1次の展開、c_{t+1} については c_t の周りで2次の展開、m_{t+1} については m_t の周りで2次の展開、$g_{p,t+1}$ については原点周りで2次の展開を行っている。

8）　自然利子率（natural rate of interest）とは、スウェーデンの経済学者ヴィクセル（J. Wicksel）によって提唱された概念で、元々は貯蓄と投資を均等させる利子率として提示された。現代の経済理論モデルでは、モデル体系における均衡実質利子率を自然利子率と呼ぶことが多い。また、自然利子率は「実際」の景気に対して中立という意味で中立金利とも呼ばれており、「インフレーションを加速も減速もさせない」［岩田・左三川（2016, p.17）］均衡金利という意味でも使われる。ただし、ここでいうインフレーションとは「実際に実現した」物価変動のことであり、経済主体によって「予想（期待）される」期待インフレーションのことではない。すなわち、本研究は、自然利子率が貨幣価値決定メカニズムを通じて経済主体による物価の「期待」形成にどのような影響をもたらし得るのかを考察している点に特徴があるといえる。

参考文献

岩田一政・左三川郁子（2016）、『マイナス金利政策』、日本経済新聞出版社。

小野善康（1992）、『貨幣経済の動学理論』、東京大学出版会。

加藤涼（2007）、『現代マクロ経済学講義』、東洋経済新報社。

齊藤誠（2006）、『新しいマクロ経済学（新版）』、有斐閣。

Arrow, K. J.（1951）, "Alternative Approaches to the Theory of Choice in Risk-Taking Situations," *Econometrica* 19（4）, pp.404-437.

Baba, N.（2000）, "Exploring the Role of Money in Asset Pricing in Japan: Monetary Considerations and Stochastic Discount Factors," *Monetary and Economic Studies* 18（2）, pp.159-198.

Breeden, D. T.（1979）, "An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities," *Journal of Financial Economics* 7（3）, pp.265-296.

Finn, M. G., D. L. Hoffman and D. E. Schlagenhauf（1990）, "Intertemporal Asset-Pricing Relationships in Barter and Monetary Economies," *Journal of Monetary Economics* 25（3）, pp.431-451.

Holman, J. A.（1998）, "GMM Estimation of a Money-in-the-Utility-Function Model: The Implications of Functional Forms," *Journal of Money, Credit and Banking* 30（4）, pp.679-698.

Kimball, M. S.（1990）, "Precautionary Saving in the Small and in the Large," *Econometrica* 58（1）, pp.53-73.

Lucas, R. E., Jr.（1978）, "Asset Prices in an Exchange Economy," *Econometrica* 46（6）, pp.1429-1445.

Poterbe, J. M. and J. J. Rotemberg（1987）, "Money in the utility function: an empirical implementation," in W. B. Barnett and K. Singleton eds., *New Approaches to Monetary Economics: Proceedings of the Second International Symposium in Economic Theory and Econometrics*, Chapter 10, Cambridge: Cambridge University Press, pp.219-240.

Pratt, J. W.（1964）, "Risk Aversion in the Small and in the Large," *Econometrica* 32（1-2）, pp.122-136.

Romer, D.（2006）, *Advanced Macroeconomics*, 3rd ed., New York: McGraw-Hill.［（邦訳）堀雅博・岩成博夫・南條隆訳（2010）、『上級マクロ経済学（第 3 版）』、日本評論社。］

Shreve, S. E.（2004*a*）, *Stochastic for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model*, New York: Springer-Verlag.［（邦訳）長山いづみ他訳（2006）、『ファイナンスのための確率解析Ⅰ―二項モデルによる資産価格評価』、シュプリンガー・フェアラーク東京。］

Shreve, S. E.（2004*b*）, *Stochastic for Finance II: Continuous-Time Models*, New York: Springer-Verlag.［（邦訳）長山いづみ他訳（2008）、『ファイナンスのための確率解析Ⅱ―連続時間モデル』、シュプリンガー・ジャパン。］