流通科学大学論集—人間・社会・自然編—第 23 巻第 1 号，169-176（2010）

＜資料＞

余半単体複体 $\underset{\sim}{R}X$ について

A Property of the Cosimplicial Complex $\underset{\sim}{R}X$

又賀　喜治*
Yoshiharu Mataga

半単体複体 X と，単位要素をもつ可換環 R から導出される余半単体複体 $\underset{\sim}{R}X$ には，余面作用素と余退化作用素の合成と組み合わせにより，ある内部写像が構成される。内部写像が応用のための所期の性質を持つことを確認する。応用については，何段階かあるうちの第一段階を述べる。
キーワード：半単体複体，余半単体複体，半単体複体の R 導出，対構成，

第 1 節　目的

参考文献 1) P.28 に定義されている対構成と呼ばれる写像 (本資料では第 4 節 (4.1))

$$c : \hom(X, \underset{\sim}{R}Y) \times \hom(W, \underset{\sim}{R}X) \longrightarrow \hom(W, \underset{\sim}{R}Y)$$

が余半単体複体としての写像であることを示し，c は推移的性質 (第 4 節 (4.2))

$$c(c(f,g),h) = c(f, c(g,h))$$

を持つことを確かめる。1) にはこれらの事実は明記されているが，その証明の詳細は記されていない。これらの命題は，余半単体複体 $\underset{\sim}{R}X$ に備わっているある性質の応用として導かれる。その性質を第 3 節補助定理 3–2 および 補助定理 3–3 に述べ，それら補助定理の証明を資料とする。

以下の第 2 節では余半単体複体 $\underset{\sim}{R}X$ を定義し，第 3 節では $\underset{\sim}{R}X$ に備わる性質を証明とともに述べ，第 4 節では，その性質に基づいて定義される上記の対構成について記す。

第 2 節　余半単体複体 $\underset{\sim}{R}X$

本節では，参考文献 1) の Chapter 1 および Chapter 10 を参照し余半単体複体 $\underset{\sim}{R}X$ を定義する。半単体複体の基本的性質については参考文献 2) を参照した。

半単体複体の圏を $\mathcal{S}$ とする。余半単体複体 $\underset{\sim}{X}$ は次の (i)，(ii) から成る [1)Chapter10]。

(i)　各整数 $n \geqq 0$ に対して，$\underset{\sim}{X}^n \in \mathcal{S}$ （n を余次元という），

(ii)　各整数の対 (i,n) $(0 \leqq i \leqq n)$ に対して，余面作用素と呼ばれる写像 $d^i : \underset{\sim}{X}^{n-1} \to \underset{\sim}{X}^n \in \mathcal{S}$ と余退化作用素と呼ばれる写像 $s^i : \underset{\sim}{X}^{n+1} \to \underset{\sim}{X}^n \in \mathcal{S}$ が備わっており，余面作用素と余退化作用素は次に記す等式群をみたす。

---

* 流通科学大学商学部、〒 651-2188　神戸市西区学園西町 3-1

（2010 年 4 月 9 日受理）

$$
\begin{array}{lcllllcll}
d^j d^i & = & d^i d^{j-1} & (i<j) & \qquad & s^j d^i & = & d^i s^{j-1} & (i<j) \\
s^j s^i & = & s^i s^{j+1} & (i \leqq j) & & s^j d^i & = & id \text{（恒等写像）} & (i=j, j+1) \\
 & & & & & s^j d^i & = & d^{i-1} s^j & (i>j+1)
\end{array}
$$

2 つの余半単体複体 $\underset{\sim}{X}$，$\underset{\sim}{Y}$ に対して，余写像 $f:\underset{\sim}{X} \to \underset{\sim}{Y}$ は，余面作用素，余退化作用素と可換な写像 $f:\underset{\sim}{X}^n \to \underset{\sim}{Y}^n \ \in \mathcal{S}$ $(n \geqq 0)$ から成る写像群を指す。余半単体複体を対象とし，余写像を射とする圏を $c\mathcal{S}$ と表す。

$\underset{\sim}{X}$，$\underset{\sim}{Y} \in c\mathcal{S}$ とするとき，それらの積 $\underset{\sim}{X} \times \underset{\sim}{Y} \in c\mathcal{S}$ は次のように定義される；余次元 n の半単体複体は $\underset{\sim}{X}^n \times \underset{\sim}{Y}^n \in \mathcal{S}$ とし，余面作用素と余退化作用素は，$\underset{\sim}{X}$，$\underset{\sim}{Y}$ それぞれに備わっている余面作用素，余退化作用素の積とする。$X \in \mathcal{S}$，$\underset{\sim}{Y} \in c\mathcal{S}$ とするとき，$X \times \underset{\sim}{Y} \in c\mathcal{S}$ は，$X \times \underset{\sim}{Y}^n$ を余次元 n の半単体複体とし，$id \times d^i$，$id \times s^i$ を余面作用素，余退化作用素とする余半単体複体とする。

$\underset{\sim}{X} \in c\mathcal{S}$ とする。$\underset{\sim}{X}^{-1} \in \mathcal{S}$ と $d^0:\underset{\sim}{X}^{-1} \to \underset{\sim}{X}^0 \ \in \mathcal{S}$ が備わっており，

$$d^0 d^0 = d^1 d^0 : \underset{\sim}{X}^{-1} \longrightarrow \underset{\sim}{X}^1 \qquad \in \mathcal{S}$$

が成り立つとき，$\underset{\sim}{X}$ は添加されている，あるいは添加余半単体複体といわれる。このとき，$d^0:\underset{\sim}{X}^{-1} \to \underset{\sim}{X}^0$ は添加写像と呼ばれる。

$\Delta[n]$　$(n \geqq 0)$ を n 次元標準半単体複体とする。余次元 n の半単体複体として $\Delta[n]$ をもち，余面作用素，余退化作用素をそれぞれ $d^i = \delta_i$，$s^j = \sigma_j$ とする余半単体複体を $\underset{\sim}{\Delta}$ と表し，標準余半単体複体という。ここで，$\delta_i : \Delta[n] \to \Delta[n+1]$ $(0 \leqq i \leqq n+1)$，$\sigma_j : \Delta[n] \to \Delta[n-1]$ $(0 \leqq j \leqq n-1)$ は，参考文献 2) の P.4 で同じ記号のもとで解説されている写像である。また，整数 $s \geqq 0$ を固定するとき，$\underset{\sim}{\Delta}^{[s]}$ は，余次元 n の半単体複体として $\Delta[n]$ の s 骨格 $\Delta[n]_s$ をもつ余半単体複体とする。

$\boldsymbol{R}$ を単位要素をもつ可換環とする。$X \in \mathcal{S}$ に対して，X の単体を基底とする $\boldsymbol{R}$ 上の自由加群を $\boldsymbol{R} \otimes X$ と表すことにする。$(\boldsymbol{R} \otimes X)_n = \boldsymbol{R} \otimes X_n$ を n 単体の集合とし，X に備わっている面作用素と退化作用素を標準的な方法で $\boldsymbol{R} \otimes X$ に拡張するとき，$\boldsymbol{R} \otimes X$ は $\boldsymbol{R}$ 加群の構造をもつ半単体複体となる。そして，$\boldsymbol{R} \otimes X_n$ の部分集合 $(\boldsymbol{R}X)_n$ を (2.1) により定義する [1)Ch1,2.1]。

$$(2.1) \qquad (\boldsymbol{R}X)_n = \{\textstyle\sum_i r_i \otimes x_i \;\big|\; \sum_i r_i = 1,\ r_i \in \boldsymbol{R},\ x_i \in X_n\}$$

各整数 n について $(\boldsymbol{R}X)_n$ を n 単体の集合とし，$(\boldsymbol{R} \otimes X)_n$ に備わっている面作用素，退化作用素を $(\boldsymbol{R}X)_n$ に制限するとき，$\{(\boldsymbol{R}X)_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ は半単体複体となる。これを $\boldsymbol{R}X$ と表す。このとき，$\boldsymbol{R}$ は半単体複体の圏からそれ自身への関手となる。$\boldsymbol{R}^0 X = X$，$\boldsymbol{R}^1 X = \boldsymbol{R}X$ とし，$n > 1$ に対しては，$\boldsymbol{R}^n X$ を帰納的に $\boldsymbol{R}^n X = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{R}^{n-1} X)$ により定義する。

写像

$$\phi : X \longrightarrow \boldsymbol{R} \otimes X \in \mathcal{S}, \qquad \psi : \boldsymbol{R} \otimes (\boldsymbol{R} \otimes X) \longrightarrow \boldsymbol{R} \otimes X \in \mathcal{S}$$

をそれぞれ

$$(2.2)\qquad \phi(x) = 1 \otimes x, \qquad \psi(r \otimes (\textstyle\sum_i r_i \otimes x_i)) = \textstyle\sum_i r r_i \otimes x_i$$

により定義する。このとき，(2.2) の ϕ，ψ は自然変換

$$(2.3)\qquad \phi : Id \longrightarrow \boldsymbol{R}, \qquad \psi : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}$$

を誘導する。

余半単体複体 $\underset{\sim}{R}X$ は次のように定義される 1)Chapter1,§4。余次元 n の半単体複体は $(\underset{\sim}{R}X)^n = \boldsymbol{R}^{n+1}X$ とする。余面作用素，余退化作用素は，(2.3) の自然変換を用いてそれぞれ，

$$d^i : (\underset{\sim}{R}X)^{n-1} = \boldsymbol{R}^n X \xrightarrow{\boldsymbol{R}^i \phi \boldsymbol{R}^{n-i}} \boldsymbol{R}^{n+1} X = (\underset{\sim}{R}X)^n$$

$$s^i : (\underset{\sim}{R}X)^{n+1} = \boldsymbol{R}^{n+2} X \xrightarrow{\boldsymbol{R}^i \psi \boldsymbol{R}^{n-i}} \boldsymbol{R}^{n+1} X = (\underset{\sim}{R}X)^n$$

と定義する。このとき，$\underset{\sim}{R}X$ は $d^0 = \phi : X \to \boldsymbol{R}X = (\underset{\sim}{R}X)^0$ により添加された余半単体複体となる。

第 3 節　$\underset{\sim}{R}X$ に備わっている性質について

$X \in \mathcal{S}$ とする。$k \geqq 3$，$1 \leqq i \leqq k-2$ に対して写像 $\vartheta_i : (\underset{\sim}{R}X)^{k-1} \to (\underset{\sim}{R}X)^{k-1}$ を

$$\vartheta_i = d^{i+1}s^i + d^i s^i - id : (\underset{\sim}{R}X)^{k-1} = \boldsymbol{R}^k X \longrightarrow \boldsymbol{R}^k X = (\underset{\sim}{R}X)^{k-1}$$

により定義する 1)P.28。このとき，簡単な計算により次の補助定理 3–1 の (3.1) から (3.8) までの等式が成り立つことが確かめられる。

<u>**補助定理 3–1**</u>　(3.1)　$\vartheta_i \vartheta_i = id$　　(3.2)　$s^i \vartheta^i = s^i$

(3.3)　$\vartheta_j \vartheta_i = \vartheta_i \vartheta_j \quad (|j-i| > 1)$　　(3.4)　$\boldsymbol{R}^j \vartheta_i = \vartheta_{i+j}$

(3.5)　$\vartheta_i \vartheta_{i+1} \vartheta_i \vartheta_{i+1} = \vartheta_{i+1} \vartheta_i$　　(3.6)　$\vartheta_{i+1} \vartheta_i \vartheta_{i+1} \vartheta_i = \vartheta_i \vartheta_{i+1}$

$$(3.7)\quad \vartheta_i s^j = \begin{cases} s^j \vartheta_{i+1} & (0 \leqq j < i) \\ s^{i+1} \vartheta_i \vartheta_{i+1} & (j = i) \\ s^i \vartheta_{i+1} \vartheta_i & (j = i+1) \\ s^j \vartheta_i & (j > i+1) \end{cases} \qquad (3.8)\quad \vartheta_i d^j = \begin{cases} d^j \vartheta_{i-1} & (0 \leqq j < i) \\ d^{i+1} & (j = i) \\ d^i & (j = i+1) \\ d^j \vartheta_i & (j > i+1) \end{cases}$$

$n \geqq 1$ とする。写像

$$w_n : (\underset{\sim}{R}X)^{2n-1} = \boldsymbol{R}^{2n} X \longrightarrow \boldsymbol{R}^n X = (\underset{\sim}{R}X)^{n-1} \quad \in \mathcal{S}$$

を，$w_1 = s^0$ とし，$n \geqq 2$ に対しては，w_n は次の写像の列の合成として定義する 1)p.28。

$$\boldsymbol{R}^{2n} X \xrightarrow{\vartheta_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\vartheta_1} \boldsymbol{R}^{2n} X \xrightarrow{s^0} \boldsymbol{R}^{2n-1} X \xrightarrow{Rw_{n-1}} \boldsymbol{R}^n X$$

<u>**補助定理 3–2**</u>　$n \geqq 1$ とする。$0 \leqq i \leqq n$ に対して図式 (3.9) は可換である。また，$0 \leqq j \leqq n-1$ に対して図式 (3.10) は可換である。

$$(3.9)\quad \begin{array}{ccc} \boldsymbol{R}^{2(n+1)} X & \xrightarrow{w_{n+1}} & \boldsymbol{R}^{n+1} X \\ {\scriptstyle d^{i+(n+1)} d^i} \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle d^i} \\ \boldsymbol{R}^{2n} X & \xrightarrow{w_n} & \boldsymbol{R}^n X \end{array} \qquad (3.10)\quad \begin{array}{ccc} \boldsymbol{R}^{2(n+1)} X & \xrightarrow{w_{n+1}} & \boldsymbol{R}^{n+1} X \\ {\scriptstyle s^j s^{j+(n+1)}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle s^j} \\ \boldsymbol{R}^{2n} X & \xrightarrow{w_n} & \boldsymbol{R}^n X \end{array}$$

証明 $w_2=(Rw_1)s^0\vartheta_1=s^1s^0(d^2s^1+d^1s^1-id)=s^0s^1+s^1s^2-s^0s^2$ であるので，次の 3 つの図式が可換であることは，計算により容易に示すことができる。すなわち，$n=1$ のとき図式 (3.9)，(3.10) は可換である。

$$
\begin{tikzcd}
R^4X \arrow[r, "w_2"] & R^2X \\
R^2X \arrow[u, "d^2d^0"] \arrow[r, "w_1"] & RX \arrow[u, "d^0"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
R^4X \arrow[r, "w_2"] & R^2X \\
R^2X \arrow[u, "d^3d^1"] \arrow[r, "w_1"] & RX \arrow[u, "d^1"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
R^4X \arrow[r, "w_2"] \arrow[d, "s^0s^2"'] & R^2X \arrow[d, "s^0"'] \\
R^2X \arrow[r, "w_1"] & RX
\end{tikzcd}
$$

図式 (3.9) は，$n\geqq 2$，$i=0$ のとき，次に示すように，それぞれが可換である図式に分解することができる。ただし，図式中 $\xrightarrow{=}$ は恒等写像を表すとする。各図式の可換性は補助定理 3–1 による。

$$
\begin{tikzcd}
R^{2(n+1)}X \arrow[r, "\vartheta_n"] & R^{2(n+1)}X \arrow[r, "\vartheta_{n-1}"] & \cdots \\
R^{2n}X \arrow[u, "d^{n+1}d^0"] \arrow[r, "="] & R^{2n}X \arrow[u, "d^nd^0"] \arrow[r, "="] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

(図式は次の行に続く)

$$
\begin{tikzcd}
\arrow[r, "\vartheta_1"] & R^{2(n+1)}X \arrow[r, "s^0"] & R^{2n+1}X \arrow[r, "Rw_n"] & R^{n+1}X \\
\arrow[r, "="] & R^{2n}X \arrow[u, "d^1d^0"] \arrow[r, "="] & R^{2n}X \arrow[u, "d^0"] \arrow[r, "w_n"] & R^nX \arrow[u, "d^0"]
\end{tikzcd}
$$

したがって，(3.9) は $n\geqq 2$，$i=0$ のとき可換である。$n\geqq 2$，$1\leqq i\leqq n$ のときは，図式 (3.9) を，次のようにそれぞれが可換である図式に分解することができる。ただし，(*) の部分の可換性は n に関する帰納法による。

$$
\begin{tikzcd}
R^{2(n+1)}X \arrow[r, "\vartheta_n"] & R^{2(n+1)}X \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "\vartheta_{i+1}"] & R^{2(n+1)}X \arrow[r, "\vartheta_i"] & R^{2(n+1)}X \\
R^{2n}X \arrow[u, "d^{(n+1)+i}d^i"] \arrow[r, "\vartheta_{n-1}"] & R^{2n}X \arrow[u, "d^{(n+1)+i}d^i"] \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "\vartheta_i"] & R^{2n}X \arrow[u, "d^{(n+1)+i}d^i"] \arrow[r, "="] & R^{2n}X \arrow[u, "d^{(n+1)+i}d^{i+1}"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\arrow[r, "\vartheta_{i-1}"] & \cdots \arrow[r, "\vartheta_1"] & R^{2(n+1)}X \arrow[r, "s^0"] & R^{2n+1}X \arrow[r, "Rw_n"] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & R^{n+1}X \\
\arrow[r, "\vartheta_{i-1}"] & \cdots \arrow[r, "\vartheta_1"] & R^{2n}X \arrow[u, "d^{(n+1)+i}d^{i+1}"] \arrow[r, "s^0"] & R^{2n-1}X \arrow[u, "d^{n+i}d^i"] \arrow[r, "Rw_{n-1}"] & R^nX \arrow[u, "d^i"]
\end{tikzcd}
$$

(図式は上の行から続く)

したがって，$n\geqq 2$，$1\leqq i\leqq n$ のときも図式 (3.9) は可換である。

次に図式 (3.10) が可換であることを示す。$n\geqq 2$ とする。

$$
\begin{aligned}
Rw_n &= R\{(Rw_{n-1})s^0\vartheta_1\cdots\vartheta_{n-1}\}=(R^2w_{n-1})(Rs^0)(R\vartheta_1)\cdots(R\vartheta_{n-1}) \\
&= (R^2w_{n-1})s^1\vartheta_2\cdots\vartheta_n
\end{aligned}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
w_{n+1} &= (Rw_n)s^0\vartheta_1\cdots\vartheta_n=\{(R^2w_{n-1})s^1\vartheta_2\cdots\vartheta_n\}s^0\vartheta_1\cdots\vartheta_n \\
&= (R^2w_{n-1})s^1s^0\vartheta_3\cdots\vartheta_{n+1}\vartheta_1\cdots\vartheta_n=(R^2w_{n-1})s^0s^2\vartheta_1(\vartheta_3\vartheta_2)\cdots(\vartheta_{n+1}\vartheta_n)
\end{aligned}
$$

となり，図式 (3.10) は次のようにそれぞれが可換である図式に分解することができる。

$$\begin{tikzcd}
R^{2(n+1)}X \arrow[r, "\vartheta_{n+1}\vartheta_n"] \arrow[d, "s^0s^{n+1}"'] & R^{2(n+1)}X \arrow[r, "\vartheta_n\vartheta_{n-1}"] \arrow[d, "s^0s^n"'] & \cdots \arrow[r, "\vartheta_{i+1}\vartheta_i"] & R^{2(n+1)}X \arrow[r, "\vartheta_i\vartheta_{i-1}"] \arrow[d, "s^0s^i"'] & {} \\
R^{2n}X \arrow[r, "\vartheta_{n-1}"] & R^{2n}X \arrow[r, "\vartheta_{n-2}"] & \cdots \arrow[r, "\vartheta_{i-1}"] & R^{2n}X \arrow[r, "\vartheta_{i-2}"] & {}
\end{tikzcd}$$

（図式は次の行に続く）

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\vartheta_3\vartheta_2"] & R^{2(n+1)}X \arrow[r, "\vartheta_1"] \arrow[d, "s^0s^2"'] & R^{2(n+1)}X \arrow[r, "s^0s^2"] & R^{2n}X \arrow[r, "R^2w_{n-1}"] \arrow[d, "s^0"'] & R^{n+1}X \arrow[d, "s^0"'] \\
\cdots \arrow[r, "\vartheta_1"] & R^{2n}X \arrow[r, "="] & R^{2n}X \arrow[r, "s^0"] & R^{2n-1}X \arrow[r, "Rw_{n-1}"] & R^nX
\end{tikzcd}$$

したがって，$n \geqq 2$，$j=0$ のとき図式 (3.10) は可換である。$n \geqq 2$，$1 \leqq j \leqq n-1$ のときは，図式 (3.9) は，次のようにそれぞれが可換である図式に分解することができる。ただし，(**) の部分の可換性は n に関する帰納法による。したがって，この場合も図式 (3.10) は可換である。

$$\begin{tikzcd}
R^{2(n+1)}X \arrow[r, "\vartheta_n"] \arrow[d, "s^js^{j+(n+1)}"'] & R^{2(n+1)}X \arrow[r] \arrow[d, "s^js^{j+(n+1)}"'] & \cdots \\
R^{2n}X \arrow[r, "\vartheta_{n-1}"] & R^{2n}X \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

（図式は次の行に続く）

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & R^{2(n+1)}X \arrow[r, "\vartheta_{j+1}"] \arrow[d, "s^js^{j+(n+1)}"'] & R^{2(n+1)}X \arrow[r] \arrow[d, "s^js^{j+(n+1)}\vartheta_j"'] & \cdots \\
{} \arrow[r] & R^{2n}X \arrow[r, "\vartheta_j"] & R^{2n}X \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

（図式は次の行に続く）

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\vartheta_2"] & R^{2(n+1)}X \arrow[r, "\vartheta_1"] \arrow[d, "s^js^{j+(n+1)}\vartheta_1"'] & R^{2(n+1)}X \arrow[r, "s^0"] & R^{2n+1}X \arrow[r, "Rw_n"] \arrow[d, "s^js^{j+n}"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & R^{n+1}X \arrow[d, "s^j"'] \\
{} \arrow[r, "\vartheta_1"] & R^{2n}X \arrow[r, "="] & R^{2n}X \arrow[r, "s^0"] & R^{2n-1}X \arrow[r, "Rw_{n-1}"] & R^nX
\end{tikzcd}$$

以上により図式 (3.9)，(3.10) の可換性が示された。 証明おわり

<u>補助定理 3–3</u>　$n \geqq 1$ のとき $w_n(R^nw_n) = w_n(w_nR^n) : R^{3n}X \to R^nX$ が成り立つ。

すなわち，任意の $X \in \mathcal{S}$ について図式 (3.11) は可換である。

(3.11)
$$\begin{tikzcd}
R^{3n}X \arrow[r, "R^nw_n"] \arrow[d, "w_nR^n"'] & R^{2n}X \arrow[d, "w_n"'] \\
R^{2n}X \arrow[r, "w_n"] & R^nX
\end{tikzcd}$$

証明　$w_1 = s^0$ であるから，$n=1$ のとき補助定理 3–3 が成り立つことは明らかである。

$w_2 = s^0s^2\vartheta_1$，$w_3 = s^0s^2s^4\vartheta_3\vartheta_1\vartheta_2$ であることは容易にわかる。$n \geqq 2$，$1 \leqq k \leqq n-1$ に対して，k 個の写像 $\vartheta_{2n-(2k+1)}$，ϑ_{2n-2k}，$\cdots$，$\vartheta_{2n-(k+2)}$ の合成を (3.12) の通り Θ^n_k とおく。

(3.12)
$$\Theta^n_k = \vartheta_{2n-(2k+1)}\vartheta_{2n-2k}\cdots\vartheta_{2n-(k+2)}$$

このとき，n に関する帰納法により，$n>3$ に対して w_n は

$$w_n = s^0 s^2 \cdots s^{2(n-1)} \Theta_1^n \Theta_2^n \cdots \Theta_{n-1}^n \qquad (n>3) \tag{3.13}$$

と表せることがわかる。したがって，図式 (3.11) で問題とする写像は

$$w_n(\boldsymbol{R}^n w_n) = s^0 s^2 \cdots s^{2(n-1)} \Theta_1^n \Theta_2^n \cdots \Theta_{n-1}^n \text{（作用素の合成として次の行に続く）} \tag{3.14}$$
$$s^n s^{2+n} \cdots s^{2(n-1)+n} (\boldsymbol{R}^n \Theta_1^n)(\boldsymbol{R}^n \Theta_2^n) \cdots (\boldsymbol{R}^n \Theta_{n-1}^n)$$

$$w_n(w_n \boldsymbol{R}^n) = s^0 s^2 \cdots s^{2(n-1)} \Theta_1^n \Theta_2^n \cdots \Theta_{n-1}^n \text{（作用素の合成として次の行に続く）} \tag{3.15}$$
$$s^0 s^2 \cdots s^{2(n-1)} \Theta_1^n \Theta_2^n \cdots \Theta_{n-1}^n$$

と表される。(3.4) 式と (3.7) 式を利用することにより，式 (3.14)，(3.15) は次の形に書き表されることがわかる。

$$w_n(\boldsymbol{R}^n w_n) = s^{j_1} \cdots s^{j_{2n}} \vartheta_{k_1} \cdots \vartheta_{k_\ell} \tag{3.16}$$
$$(0 \leqq j_a \leqq 3n-2,\ 0 \leqq k_b \leqq 3n-2\ (a=1,\cdots,2n,\ b=1,\cdots,\ell))$$

$$w_n(w_n \boldsymbol{R}^n) = s^{j'_1} \cdots s^{j'_{2n}} \vartheta_{k'_1} \cdots \vartheta_{k'_{\ell'}} \tag{3.17}$$
$$(0 \leqq j'_a \leqq 3n-2,\ 0 \leqq k'_b \leqq 3n-2\ (a=1,\cdots,2n,\ b=1,\cdots,\ell'))$$

(3.14) と (3.15) が写像として等しいことを示すために，$\boldsymbol{R}^n X$ よりも扱いの簡単な対象を利用する。無限個の異なる文字 $g_0, g_1, \cdots$ から生成される自由群 3)§1.10 を G とし，G の要素の無限列から成る集合を Ξ とおく。

$$\Xi = \{(\xi_0, \xi_1, \cdots) \mid \xi_i \in G \quad (i=0,1,\cdots)\}$$

Ξ に対して下記の (3.18)，(3.19) により定義される 2 種類の作用素 ς^j，t_i $(j=0,1,2,\cdots, i=1,2,\cdots)$ を考える。ς^j は，座標番号が $j-1$ 以下の要素を保ち，第 j 座標の要素に第 $j+1$ 座標の要素を右から掛け，座標番号が $j+2$ 以上の位置にある要素を番号が 1 だけ小さい座標の位置に移す作用素である。t_i は第 i 座標の要素と第 $i+1$ 座標の要素を入れ替え，他の座標の要素は保つ作用素である。

$$\varsigma^j(\cdots, \xi_{j-1}, \xi_j, \xi_{j+1}, \xi_{j+2}, \cdots) = (\cdots, \xi_{j-1}, \xi_j\xi_{j+1}, \xi_{j+2}, \cdots) \tag{3.18}$$

$$t_i(\cdots, \xi_{i-1}, \xi_i, \xi_{i+1}, \xi_{i+2}, \cdots) = (\cdots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \xi_i, \xi_{i+2}, \cdots) \tag{3.19}$$

$\boldsymbol{R}^k$ $(k \geqq 1)$ は，作用素 ς^j，t_i の Ξ への作用において座標を k だけ増加させた作用に置き換える働きをもつとする。すなわち，

(3.20)　$\boldsymbol{R}^k \varsigma^i = \varsigma^{i+k}$　　(3.21)　$\boldsymbol{R}^k t_i = t_{i+k}$

ς^j，t_i は次に列挙する (3.22) から (3.28) までの性質を持つことは容易にわかる。

(3.22)　$\varsigma^j \varsigma^i = \varsigma^i \varsigma^{j+1}$ $(i \leqq j)$　　(3.23)　$t_i t_i = id$　　(3.24)　$\varsigma^i t^i = s^i$

(3.25)　$t_j t_i = t_i t_j$ $(|j-i|>1)$　　(3.26)　$t_i t_{i+1} t_i t_{i+1} = t_{i+1} t_i$

(3.27)　$t_{i+1} t_i t_{i+1} t_i = t_i t_{i+1}$　　(3.28)　$t_i \varsigma^j = \begin{cases} \varsigma^j t_{i+1} & (0 \leqq j < i) \\ \varsigma^{i+1} t_i t_{i+1} & (j=i) \\ \varsigma^i t_{i+1} t_i & (j=i+1) \\ \varsigma^j t_i & (j>i+1) \end{cases}$

等式 (3.22) は第2節 (ii) の等式 $s^j s^i = s^i s^{j+1}$ $(i \leqq j)$ に対応し，等式 (3.23)，(3.24)，(3.25)，(3.21)，(3.26)，(3.27)，(3.28) はこの順序で等式 (3.1)，(3.2)，(3.3)，(3.4)，(3.5)，(3.6)，(3.7) に対応する。

定義式 (3.12) に対応して t_j の合成による作用素 T_k^n $(n \geqq 2, 1 \leqq k \leqq n-1)$ を次のように定義する。

(3.29) $$T_k^n = t_{2n-(2k+1)} t_{2n-2k} \cdots t_{2n-(k+2)} \quad (k\text{ 個の作用素 } t_j \text{ の合成})$$

また，(3.14) と (3.15) にそれぞれ対応して，Ξ への次の 2 つの作用素 A と B を考える。

(3.30) $$A = \varsigma^0 \varsigma^2 \cdots \varsigma^{2(n-1)} T_1^n T_2^n \cdots T_{n-1}^n \quad \text{(作用素の合成として次の行に続く)}$$
$$\varsigma^n \varsigma^{2+n} \cdots \varsigma^{2(n-1)+n} (\boldsymbol{R}^n T_1^n)(\boldsymbol{R}^n T_2^n) \cdots (\boldsymbol{R}^n T_{n-1}^n)$$

(3.31) $$B = \varsigma^0 \varsigma^2 \cdots \varsigma^{2(n-1)} T_1^n T_2^n \cdots T_{n-1}^n \quad \text{(作用素の合成として次の行に続く)}$$
$$\varsigma^0 \varsigma^2 \cdots \varsigma^{2(n-1)} T_1^n T_2^n \cdots T_{n-1}^n$$

(3.30) と (3.31) は，(3.14) と (3.15) をそれぞれ (3.16) と (3.17) の形に変形したのと同じ理由により，それぞれ (3.32) と (3.33) に変形できる。

(3.32) $$A = \varsigma^{j_1} \cdots \varsigma^{j_{2n}} t_{k_1} \cdots t_{k_\ell}$$
$$(0 \leqq j_a \leqq 3n-2,\ 0 \leqq k_b \leqq 3n-2\ (a = 1, \cdots, 2n,\ b = 1, \cdots, \ell))$$

(3.33) $$B = \varsigma^{j'_1} \cdots \varsigma^{j'_{2n}} t_{k'_1} \cdots t_{k'_{\ell'}}$$
$$(0 \leqq j'_a \leqq 3n-2,\ 0 \leqq k'_b \leqq 3n-2\ (a = 1, \cdots, 2n,\ b = 1, \cdots, \ell'))$$

(3.30) および (3.31) の形のままで実際に A と B を Ξ の任意の要素に作用させると，それらの結果は同一であることが確かめられる。すなわち，

$$A(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots) = (\xi_0 \xi_n \xi_{2n},\ \xi_1 \xi_{n+1} \xi_{2n+1},\ \cdots,\ \xi_{n-1} \xi_{2n-1} \xi_{3n-1},\ \cdots)$$
$$B(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots) = (\xi_0 \xi_n \xi_{2n},\ \xi_1 \xi_{n+1} \xi_{2n+1},\ \cdots,\ \xi_{n-1} \xi_{2n-1} \xi_{3n-1},\ \cdots)$$

このことから (3.32)，(3.33) 式の形に表されている A と B は，等式 (3.21) と (3.26) を用いることにより，それぞれ

$$A = \varsigma^0 \varsigma^1 \cdots \varsigma^{3(i-1)} \varsigma^{3(i-1)+1} \cdots \varsigma^{3(n-1)} \varsigma^{3(n-1)+1} E$$
$$B = \varsigma^0 \varsigma^1 \cdots \varsigma^{3(i-1)} \varsigma^{3(i-1)+1} \cdots \varsigma^{3(n-1)} \varsigma^{3(n-1)+1} F$$

と表すことができる。ここで，E，F は t_j $(1 \leqq j \leqq 3n-1)$ いくつかの合成から成る Ξ への作用素とする。このように表すとき，

$$E(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots) = (\xi_0, \xi_n, \xi_{2n}, \xi_1, \xi_{n+1}, \xi_{2n+1}, \cdots, \xi_{n-1}, \xi_{2n-1}, \xi_{3n-1}, \cdots)$$
$$F(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots) = (\xi_0, \xi_n, \xi_{2n}, \xi_1, \xi_{n+1}, \xi_{2n+1}, \cdots, \xi_{n-1}, \xi_{2n-1}, \xi_{3n-1}, \cdots)$$

と，作用の結果は同じでなければならない。したがって，E と F は (3.23)，(3.25)，(3.26)，(3.27) を考慮すれば同一形に表される作用素であると結論できる。すなわち，A と B は作用素として等しい。

以上のことから，(3.14) の $w_n(\boldsymbol{R}^n w_n)$ と (3.15) の $w_n(w_n \boldsymbol{R}^n)$ についても，補助定理 3–1

の関係式を利用すれば，s^j と ϑ_i を用いて全く同一の形に表すことができることになる。したがって，補助定理 3–3 が成り立つ。　証明おわり

第 4 節　対構成

X，$Y \in \mathcal{S}$ に対して，$\mathrm{hom}(X,Y)$ は $\mathcal{S}$ における写像複体を表すとする。$X \in \mathcal{S}$，$\underset{\sim}{Y} \in c\mathcal{S}$ に対して $\mathrm{hom}(X,\underset{\sim}{Y})$ は，$\mathrm{hom}(X,\underset{\sim}{Y}^n)$ を余次元 n の半単体複体とする余半単体複体とし，$\mathrm{hom}(X,\underset{\sim}{Y})$ の余面作用素，余退化作用素は，$\underset{\sim}{Y}$ のそれらから標準的に導かれるものとする。ここでは，記号の煩雑さを避けるために次に記すように，2 種の関手を同じ記号 hom(,) で表し，hom(,) の括弧内に記入される 2 つの対象に注意することにより区別することにする。

$$\mathrm{hom} : \mathcal{S}^o \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S} \qquad\qquad \mathrm{hom} : \mathcal{S}^o \times c\mathcal{S} \longrightarrow c\mathcal{S}$$

ここで，$\mathcal{S}^o$，$c\mathcal{S}^o$ はそれぞれ $\mathcal{S}$，$c\mathcal{S}$ の双対圏を表す。

W，X，Y $\in \mathcal{S}$ に対して，対構成と呼ばれる余単体複体の間の写像

$$c : \mathrm{hom}(X,\underset{\sim}{R}Y) \times \mathrm{hom}(W,\underset{\sim}{R}X) \longrightarrow \mathrm{hom}(W,\underset{\sim}{R}Y) \tag{4.1}$$

を，q 単体の対 $f : \Delta[q] \times X \to \underset{\sim}{R}Y \in \mathrm{hom}(X,\underset{\sim}{R}Y)_q$ と $g : \Delta[q] \times W \to \underset{\sim}{R}X \in \mathrm{hom}(W,\underset{\sim}{R}X)_q$ に対して，余次元 $n-1$ $(n \geqq 1)$ において

$$\Delta[q] \times W \xrightarrow{diagonal \times id} \Delta[q] \times \Delta[q] \times W \xrightarrow{id \times g}$$
$$\Delta[q] \times \boldsymbol{R}^n X = \boldsymbol{R}^n(\Delta[q] \times X) \xrightarrow{\boldsymbol{R}^n f} \boldsymbol{R}^{2n} Y \xrightarrow{w_n} \boldsymbol{R}^n Y \quad \in \mathrm{hom}(W,\underset{\sim}{R}Y)_q^{n-1}$$

を対応させる写像として定義する 1)P.28。このとき，次の補題 4–1 が成り立つ。補題 4– 1 の (1) は補助定理 3–2 から導かれる。また，(2) は補助定理 3–3 から帰結される。

<u>補題 4–1</u>[1) P.28] (1) (4.1) で定義された写像 c は余半単体複体としての写像である。

(2) $f : \Delta[q] \times X \to \underset{\sim}{R}Y \in \mathrm{hom}(X,\underset{\sim}{R}Y)_q$，$g : \Delta[q] \times W \to \underset{\sim}{R}X \in \mathrm{hom}(W,\underset{\sim}{R}X)_q$，

$h : \Delta[q] \times Z \to \underset{\sim}{R}W \in \mathrm{hom}(Z,\underset{\sim}{R}W)_q$ とするとき，次の等式が成り立つ。

$$c(c(f,g),h) = c(f,c(g,h)) \qquad \in \mathrm{hom}(Z,\underset{\sim}{R}Y)_q$$

参考文献

1) A.K. Bousfield, D.M. Kan：“Homotopy Limits, Completions and Localizations”, LNM 304, Springer-Verlag (1972)

2) J.P. May：“Simplicial Objects in Algebraic Topology”, D.Van Nostrand Company, Inc.(1967)

3) 寺田至・原田耕一郎：“群論”, 岩波講座現代数学の基礎 14, 岩波書店 (1997)