流通科学大学論集—経済・情報・政策編—第 21 巻第 1 号，23-33（2012）

ウカシェヴィッツの多値論理演算を用いた SIRMsファジィ推論法

SIRMs Fuzzy Approximate Reasoning Using Łukasiewicz Logical Operations

三石 貴志 *
Takashi Mitsuishi

単一入力ルール群（SIRMs）上の演算として限界積および限界和を採用したファジィ推論について考察した．SIRMs ファジィ推論の出力をフィードバック則とした非線型制御に対する評価関数を，SIRMs を構成するメンバシップ関数集合族上の汎関数とみなし，最適制御問題を変分問題として扱うことにより，最適解の存在に関する結論を得た．**キーワード：** SIRMs ファジィ推論，限界積，限界和，変分問題

I.　はじめに

カリフォルニア大学の Zadeh によりファジィ集合が提唱されるとともにファジィ理論・論理が構築され [1;2]，それにもとづいたファジィ推論が Mamdani[3] により提案され，制御分野にファジィネスの概念が応用されるようになった．Mamdani の推論法はファジィ集合演算として最小値（∧），最大値（∨）を採用し，水本による代数積-加算-重心法 [7] は推論過程の簡略化を目的に通常の積（代数積）と和（加算）を用いた方法であり，共にエキスパートシステムとして広く制御分野や意思決定分野において応用がなされている．ウカシェヴィッツの多値論理にもとづく限界積，限界和はファジィ集合間の演算の一つであり，限界積は最小値，積同様 t-ノルムであり，また限界和は最大値，和同様に t-コノルムとなっている [16]．他にも代数積・代数和，激烈積・激烈和等の演算があり，それぞれ t-ノルム・t-コノルムの条件を満たしており，ファジィ推論への適用が行われている [8]．

湯場崎らにより提案された単一入力ルール群（single input rule modules，以下 SIRMs）ファジィ推論法は従来の IF-THEN 型ファジィルールよりも大幅にルール数が少ない推論法であり，パラメータ，ルールの設定が容易となり良好な結果が得られている [4;5]．また，後件部を関数に一般化した関数型 SIRMs ファジィ推論法は，T-S 推論法の特別な場合で，特定の条件下で従来の IF-THEN 型ルールを SIRMs に変換できることが関らにより明らかにされている [6]．

*流通科学大学商学部、〒 651-2188　神戸市西区学園西町 3-1

（2012 年 3 月 30 日受理）

SIRMs ファジィ推論法の演算として積・和演算，最小・最大値が採用されている．しかしながら本研究では，限界積，限界和を適用したファジィ推論について考察した．限界積を用いた合意規則が見受けられることから，前件部適合度を後件部へ反映させる演算子を限界積とし，一方，各ルールの推論結果間の結び，つまり最終的な結論は限界和を用いて得られるとした．t-ノルムに関して，最小値，代数積，限界積，激烈積の順に値が大きく，t-コノルムに関しては逆であり，激烈和，限界和，代数和，最大値の順で値を大きくとる．各ルールの推論結果のとり得る値とその統合結果の均衡を考慮して限界積に対応する演算として限界和を採用することとした．

筆者らはこれまでファジィ最適制御の存在性に関する研究を行ってきた [9;10;11;12]．推論計算，制御システムおよびシステムの評価関数を，IF-THEN ルールを構成するメンバシップ関数集合族上の汎関数とみなし，関数の極値問題に帰着させ評価関数に最小値（最大値）を与える，すなわち最適制御をもたらすメンバシップ関数対（IF-THEN ルール）の存在性に関して考察した．本研究はこれらの継続で，SIRMs ファジィ推論を用いた最適フィードバック制御則の存在について汎関数の連続性を導くことによって証明した．

II.　ファジィ制御

本研究ではファジィ制御として，フィードバック則を SIRMs ファジィ推論の出力値で与える非線型フィードバックシステムを扱う．

1.　非線型フィードバックシステム

$\mathbb{R}^n$ を n 次元ユークリッド空間とし，ノルムを $\|\cdot\|$ で表す. 絶対値記号は $|\cdot|$ とする．

次の状態方程式によって与えられる非線型フィードバックシステムについて考える．

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)). \tag{1}$$

ここで $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ は，リプシッツ連続な非線型ベクトル値関数とし，f に依存する定数 $M_f > 0$ が存在し，任意の $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ に対し

$$\|f(v_1, v_2)\| \leq M_f\,(\|v_1\| + |v_2| + 1)$$

が成立していると仮定する．さらに $x(t)$ はシステムの状態とし，制御入力 $u(t)$ は状態フィードバック則 $u(t) = \rho(x(t))$ で与えられる．十分大きな正数 r に対し，システムの初期状態 x_0 の許容される有界集合を $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq r\}$ とする．また T を十分大きな終端時間とする．この制御系に対し，以下の命題が成立している [10]．

命題 1 $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ をリプシッツ連続, $x_0 \in B_r$ とする．このとき状態方程式

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \rho(x(t)))$$

は初期条件 $x(0) = x_0$ のもとで $[0,T]$ において一意の解 $x(t, x_0, \rho)$ をもち $(t, x_0) \in [0,T] \times B_r \mapsto x(t, x_0, \rho)$ は連続である．さらに任意の $r_2 > 0$ に対し

$$\Phi = \left\{ \rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R};\ \text{リプシッツ連続},\ \sup_{u \in \mathbb{R}^n} |\rho(u)| \leq r_2 \right\}$$

とおくと, 状態方程式の解について以下の（a）,（b）が成り立つ．

（a） 任意の $t \in [0,T], x_0 \in B_r$ および $\rho \in \Phi$ に対し

$$\|x(t, x_0, \rho)\| \leq r_1.$$

ただし,

$$r_1 = e^{M_f T} r + (e^{M_f T} - 1)(r_2 + 1). \tag{2}$$

（b） $\rho_1, \rho_2 \in \Phi$ とする．任意の $t \in [0,T]$, $x_0 \in B_r$ に対し

$$\|x(t, x_0, \rho_1) - x(t, x_0, \rho_2)\| \leq \frac{e^{L_f\,(1+L_{\rho_1})t} - 1}{1 + L_{\rho_1}} \sup_{u \in [-r_1, r_1]^n} |\rho_1(u) - \rho_2(u)|, \tag{3}$$

ただし L_f, L_{ρ_1} はそれぞれ f, ρ_1 のリプシッツ定数.

2. 評価汎関数

状態方程式（1）のフィードバック則 $u(t) = \rho(x(t))$ を，ある時間 $t \in [0,T]$ における状態変数 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) = x(t)$ が与えられたときのファジィ推論による出力値とする．つまり ρ は IF-THEN ルール（SIRMs）等を構成するファジィ集合のメンバシップ関数と推論演算の合成関数と考えられる．一方，メンバシップ関数集合の属する集合族を $\mathcal{M}$，要素を $\mathcal{F}$ とすると，推論計算 ρ は $\mathcal{M}$ 上の合成汎函数とみなすこともできる．よって $\mathcal{F}$ を添えた $\rho_{\mathcal{F}}$ と表記する．

ファジィフィードバック制御の性能を評価する関数を以下のように定義する．

$$J = \int_{B_r} \int_0^T w(x(t, \zeta, \rho_{\mathcal{F}}), \rho_{\mathcal{F}}(x(t, \zeta, \rho_{\mathcal{F}})))dtd\zeta \tag{4}$$

ここで，$w : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は正値連続関数である．評価関数 J は $\rho_{\mathcal{F}}$ に依存する関数であるといえる．さらに初期値の許容範囲 B_r および終端時間 T は既知であるとみなされるので，J は $\mathcal{M}$ 上の汎関数である．つまり本研究の最適化問題（最適制御問題）は変分問題として扱うことができる．以下に示す命題は上述の評価関数（4）を最小もしくは最大にする $\mathcal{M}$ 上の $\mathcal{F}$ の存在を保証するものである．

補題 1 $\mathcal{M}$ をコンパクト距離空間とする．$\{\mathcal{F}^k\}_{k \in N} \subset \mathcal{M}$ について，$\mathcal{F}^k \to \mathcal{F} \in \mathcal{M}$ $(k \to \infty)$ のとき

$$\sup_{x \in [-r_1, r_1]^n} |\rho_{\mathcal{F}^k}(x) - \rho_{\mathcal{F}}(x)| \to 0\ (k \to \infty) \tag{5}$$

ならば，写像

$$\mathcal{F} \in \mathcal{M} \mapsto J = \int_{B_r} \int_0^T w(x(t, \zeta, \rho_{\mathcal{F}}), \rho_{\mathcal{F}}(x(t, \zeta, \rho_{\mathcal{F}})))dtd\zeta$$

は *1.* 節で定められた定数のもと，コンパクト距離空間 $\mathcal{M}$ 上の汎函数として最小値（最大値）をもつ．

（証明） 写像 J が $\mathcal{M}$ 上の汎関数として連続であることを示す．$(t,\zeta) \in [0,T] \times B_r$ を固定すると式（5）および命題 1（b）より

$$\lim_{k\to\infty} \|x(t,\zeta,\rho_{\mathcal{F}^k}) - x(t,\zeta,\rho_{\mathcal{F}})\| = 0 \tag{6}$$

である．さらに式（5），(6）および命題 1（a）より

$$\lim_{k\to\infty} \rho_{\mathcal{F}^k}(x(t,\zeta,\rho_{\mathcal{F}^k})) = \rho_{\mathcal{F}}(x(t,\zeta,\rho_{\mathcal{F}})) \tag{7}$$

である．関数 $w : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が正値かつ連続であることに注意すると，式（6），(7）およびルベーグの有界収束定理 [14;15] により写像 J はコンパクト距離空間 $\mathcal{M}$ の上で連続である．ゆえに最小値（最大値）を持つ．(証明終)

3.　単一入力ルール群 (Single Input Rule Modules)

式（1）の状態フィードバック則 $u(t) = \rho(x(t))$ は，次に示す SIRMs により構成されるとする．

$$\begin{aligned}
&\text{SIRM-1} : \{R_j^1 : \text{if } x_1 = A_j^1 \text{ then } y = C_j^1\}_{j=1}^{m_1} \\
&\qquad\qquad\cdots \\
&\text{SIRM-}i : \{R_j^i : \text{if } x_i = A_j^i \text{ then } y = C_j^i\}_{j=1}^{m_i} \\
&\qquad\qquad\cdots \\
&\text{SIRM-}n : \{R_j^n : \text{if } x_n = A_j^n \text{ then } y = C_j^n\}_{j=1}^{m_n}
\end{aligned} \tag{8}$$

ここで n はルール群の数であり，前件部変数 $x_1, x_2, \ldots x_n$ の数である．$m_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ は各ルール群を構成するルールの数，y は後件部変数である．前件部変数のベクトルを x と書き，SIRMs ファジィ推論の入力とする．

$A_j^i(x_i)$ および $C_j^i(y)$ $(i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, m_i)$ をそれぞれ SIRM-i の j 番目のルールにおけるファジィ集合 A_j^i および C_j^i の前件部変数 x_i および後件部変数 y に対するファジィグレードとする．つまり本稿ではメンバシップ関数とファジィ集合を同じ記号で示す．

前件部，後件部のメンバシップ関数について，

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^i &= (A_1^i, A_2^i, \ldots, A_{m_i}^i), \quad \mathcal{C}^i = (C_1^i, C_2^i, \ldots, C_{m_i}^i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \\
\mathcal{A} &= (\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2, \ldots, \mathcal{A}^n), \quad \mathcal{C} = (\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2, \ldots, \mathcal{C}^n).
\end{aligned}$$

のとおくと $\mathcal{A}^i$ $(i = 1, 2, \ldots, m_i)$ は SIRM-i の前件部のメンバシップ関数の対，$\mathcal{A}$ はルール全体における前件部のメンバシップ関数の対，$\mathcal{C}$ も同様には後件部のメンバシップ関数の対として表される．すなわち $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ は SIRMs（8）自体を表していると考えてよい．本研究ではこれをファジィコントローラと呼ぶ．

4. SIRMs ファジィ推論

ある時間 $t \in [0, T]$ における非線型フィードバックシステムの状態，すなわち前件部変数の確定値 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ がファジィコントローラ $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$（SIRMs（8））へ入力値として与えられたとき，推論計算の出力値 ρ は以下の手順で計算されるとする．湯場崎らにより提案された SIRMs ファジィ推論法では通常の和と積の演算が用いられていたが [4]，本研究ではそれらの代わりにファジィ理論における演算の一つである限界和および限界積を用いる．代数積の替わりに限界積を用いると，後件部のメンバシップ関数が三角型である場合，前件部の適合度を後件部に反映させる過程において，メンバシップ関数が適合度分だけ下に沈み，代数積のときよりも裾野が狭い三角形となる．つまり推論結果の確定値（クリスプ値）のとりうる範囲が狭くなり，より精密な結果を得られる可能性がある．

手順 1: 前件部の適合度を用いて SIRM-i における j 番目のルール R^i_j の推論結果求める．

$$\alpha^i_j(x_i, y) = A^i_j(x_i) \odot C^i_j(y) \quad (j = 1, 2 \ldots, m_i;\ i = 1, 2, \ldots, n).$$

ここで $\odot$ は限界積

$$A^i_j(x_i) \odot C^i_j(y) = (A^i_j(x_i) + C^i_j(y) - 1) \vee 0,$$

である．すなわち後件部のメンバシップ関数のグラフ $C^i_j(y)$ を $(1 - A^i_j(x_i))$ だけ押し下げ，0 未満の値は 0 とし横軸より上に出ている部分になる．

手順 2: 手順 1 で得られたルール群 SIRM-i におけるすべてのルール R^i_j の推論結果を限界和 $\oplus$ によって統合し，このルール群の推論結果を計算する．

$$\beta_i(x_i, y) = \bigoplus_{j=1}^{m_i} \alpha^i_j(x_i, y) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

ただし限界和 $\oplus$ について，例えば $j = 1, 2$ の場合，

$$\alpha^i_1(x_i, y) \oplus \alpha^i_2(x_i, y) = (\alpha^i_1(x_i, y) + \alpha^i_2(x_i, y)) \wedge 1,$$

である．

手順 3: 非ファジィ化を行う．重心法を用いルール群 SIRM-i の推論結果の確定値を得る．

$$\gamma_i(x_i) = \frac{\int y\beta_i(x_i, y)dy}{\int \beta_i(x_i, y)dy}.$$

SIRMs ファジィモデルでは，各入力 $x_1, x_2, \ldots, x_n$(ルール群 SIRM-i) に対して重視度 $d_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ が与えられている．これは，値が大きければ対応のルール群 SIRM-i が強調され，小さいと役割が抑制される．本研究では重視度 $d_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ の総和を 1 とする．また，$\mathcal{A}$ や $\mathcal{C}$ と同様に，

$$d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$$

とおく．

手順 4: 重視度 d を用い，本推論法の最終出力を以下のようにルール群の重視度付き総和として計算する．

$$\rho_{\mathcal{AC}d}(x) = \sum_{i=1}^{n} d_i \gamma_i(x_i).$$

推論結果 ρ は入力 x だけでなく，ファジィ集合（メンバシップ関数）および重視度にも依存しているので，$\mathcal{A}, \mathcal{C}$ および d を添えて表示する．

III. ファジィ集合族とコンパクト性

本節では，SIRMs を構成するメンバシップ関数の属する空間を連続関数空間とし，ファジィコントローラ $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ が属する集合族である許容制御族の位相的性質について考察する．

1. 節に倣って，十分大きな定数 $r > 0$，任意定数 $r_2 > 0$ およびシステムの終端時間を T とする．すると命題 1 の式（2）より正定数 r_1 を得る．これらに対し，$C[-r_1, r_1]$ および $C[-r_2, r_2]$ をそれぞれ閉区間 $[-r_1, r_1]$，$[-r_2, r_2]$ 上の実数値連続関数空間とする．さらに，定数 $\Delta_{ij} > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ を用い，以下の 2 つのメンバシップ関数集合について考える．

$$
\begin{aligned}
F_{\Delta_{ij}} = \{\mu \in C[-r_1, r_1];\ & 0 \le \mu(x) \le 1 \text{ for } \forall x \in [-r_1, r_1], \\
& |\mu(x) - \mu(x')| \le \Delta_{ij}|x - x'| \text{ for } \forall x, x' \in [-r_1, r_1]\}
\end{aligned}
$$

および

$$
G = \{\mu \in C[-r_2, r_2];\ 0 \le \mu(y) \le 1 \text{ for } \forall y \in [-r_2, r_2]\}.
$$

本研究では，前件部のメンバシップ関数 A_j^i が集合 $F_{\Delta_{ij}}$，後件部のメンバシップ関数 C_j^i が G に属すると仮定する．前件部のメンバシップ関数集合 $F_{\Delta_{ij}}$ に対するリプシッツ連続性は，後件部のメンバシップ関数集合 G よりも条件が厳しい．しかしながらリプシッツ定数 Δ_{ij} を十分大きくとることにより，この集合には，対称性を求めない三角型，台形型，釣鐘型などの一般的なメンバシップ関数が含まれる．よって通常の条件の下での実用において厳しすぎる条件でないと考える．

メンバシップ関数集合 $F_{\Delta_{ij}}$，G で，それぞれ連続関数空間 $C[-r_1, r_1]$ および $C[-r_2, r_2]$ のノルム位相を考える．すると，すべての $i = 1, 2, \ldots, n$ および $j = 1, 2, \ldots, m_i$ に対し，$F_{\Delta_{ij}}$ は $C[-r_1, r_1]$ のコンパクト部分集合である．同様に G もコンパクトである [9]．ここで，

$$
\mathcal{L}' = \prod_{i=1}^{n} \left\{ \prod_{j=1}^{m_i} \left(F_{\Delta_{ij}} \times G\right) \right\}.
$$

とおく．すると，直積集合 $\mathcal{L}'$ の要素 $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ は SIRMs（8）で与えられるファジィコントローラである．チコノフの定理 [15] より，次の命題を得る．

命題 2 $\mathcal{L}'$ は直積位相に対してコンパクト距離空間である．

湯場崎らによれば，重視度に対する $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i \le 1$ なる条件は必ずしも必要でないとされているが [4]，本研究では状態方程式（1）の解の存在性を保証するため，重視度 $d_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ は以下の集合 D に属すると仮定する．

$$
D = \left\{ d = (d_1, d_2, \ldots, d_n) \in \mathbb{R}^n; \forall i = 1, 2, \ldots, n,\ d_i \in (0, 1), \sum_{i=1}^{n} d_i \le 1 \right\}
$$

ここで，

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}' \times D.$$

とし，ファジィコントローラに重視度 d を加えた $\mathcal{L}$ の要素 $(\mathcal{A}, \mathcal{C}, d)$ を新たにファジィコントローラと呼ぶ．

推論過程における手順3の非ファジィ化の重心法の計算式で分母が0にならないようにするため，定数 $\delta > 0$ を用いた以下の集合を考える．

$$\mathcal{L}_\delta = \left\{ (\mathcal{A}, \mathcal{C}, d) \in \mathcal{L};\ \forall i = 1, 2, \ldots, n, \forall x \in [-r_1, r_1]^n, \int_{-r_2}^{r_2} \beta_i(x_i, y) dy \geq \delta \right\}. \tag{9}$$

δ を十分小さな値とすることで，実用上 $\mathcal{L}$ と同一と考えることができる．この集合に属さない，面積が常に0であるような後件部のメンバシップ関数や，ある入力 x に対しすべてのルールの適合度が0になるような前件部のメンバシップ関数は，設定の段階で除外されて然るべきと考える．以後，$\mathcal{L}_\delta$ の要素 $(\mathcal{A}, \mathcal{C}, d)$ をファジィ許容制御則と呼ぶ．このファジィ許容制御則の族 $\mathcal{L}_\delta$ について以下の命題を得る．

命題 3 $\mathcal{L}_\delta$ は直積位相に対して距離空間であり，かつコンパクトである．

（証明） 距離空間であることの証明は自明により省略．$\{(\mathcal{A}^k, \mathcal{C}^k, d^k)\} \subset \mathcal{L}$ が $(\mathcal{A}, \mathcal{C}, d) \in \mathcal{L}$ へ収束するとは，すべての $i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, m_i$ について

$$\|A_i^{j^k} - A_i^j\|_\infty = \sup_{x_i \in [-r_1, r_1]} |A_i^{j^k}(x_i) - A_i^j(x_i)| \to 0$$

および

$$\|C_i^{j^k} - C_i^j\|_\infty = \sup_{y \in [-r_2, r_2]} |C_i^{j^k}(y) - C_i^j(y)| \to 0$$

が成立することである．

ここで $x \in [-r_1, r_1]^n$ を固定し，$\{(\mathcal{A}^k, \mathcal{C}^k, d^k)\} \subset \mathcal{L}_\delta$ が $(\mathcal{A}, \mathcal{C}, d) \in \mathcal{L}$ に収束すると仮定すると，任意の $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し

$$\int_{-r_2}^{r_2} \beta_i(x_i, y) dy = \lim_{k \to \infty} \int_{-r_2}^{r_2} \bigoplus_{j=1}^{m_i} A_j^i(x_i) \odot C_j^i(y) dy = \lim_{k \to \infty} \int_{-r_2}^{r_2} \bigoplus_{j=1}^{m_i} A_j^{i^k}(x_i) \odot C_j^{i^k}(y) dy \geq \delta$$

を得る．これより $(\mathcal{A}, \mathcal{C}, d) \in \mathcal{L}_\delta$ である．ゆえに $\mathcal{L}_\delta$ はコンパクト集合 $\mathcal{L}$ の閉部分集合であるのでコンパクト距離空間である．（証明終）

IV. 推論計算の連続性とその応用

状態方程式 (1) のフィードバック則 $u(x) = \rho_{\mathcal{AC}d}(x)$ を，ある時間 $t \in [0, T]$ における状態 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) = x(t)$ が入力値としてルール群 SIRMs（8）に与えられたとき，4. 節に倣って以下の SIRMs ファジィ推論計算で求める．ただし，ルール群 SIRMs は式（9）で定義した許容制御族 $\mathcal{L}_\delta$ の要素であるファジィ許容制御則 $(\mathcal{A}, \mathcal{C}, d)$ より構成されるとする．

$$\rho_{\mathcal{AC}d}(x) = \sum_{i=1}^{n} d_i \frac{\int_{-r_2}^{r_2} y \beta_i(x_i, y) dy}{\int_{-r_2}^{r_2} \beta_i(x_i, y) dy}$$

ただし，

$$\beta_i(x_i,y)=\bigoplus_{j=1}^{m_i}A_j^i(x_i)\odot C_j^i(y)\quad(i=1,2,\ldots,n)$$

である．この推論演算 $\rho_{\mathcal{AC}d}$ について以下の命題を得る．

命題 4 $(\mathcal{A},\mathcal{C},d)\in\mathcal{L}_\delta$ であるならば，次の（a）と（b）が成立する．

（a） $\rho_{\mathcal{AC}d}$ は $[-r_1,r_1]^n$ 上のリプシッツ連続関数である．

（b） 任意の $x\in[-r_1,r_1]^n$ に対して $|\rho_{\mathcal{AC}d}(x)|\le r_2$.

（証明）　(a) 写像 $\rho_{\mathcal{AC}d}$ は各推論計算の合成関数ゆえ，4. 節で示した α_j^i, β_i, γ_i それぞれの関数について証明する．各 $i=1,2,\ldots,n; j=1,2,\ldots,m_i$ について，$\forall x=(x_i)_{i=1}^n, x'=(x_i{}')_{i=1}^n\in[-r_1,r_1]^n$ とすると

$$\begin{aligned}
|\alpha_j^i(x_i,y)-\alpha_j^i(x_i{}',y)|&=|A_j^i(x_i)\odot C_j^i(y)-A_j^i(x_i{}')\odot C_j^i(y)|\\
&\le\frac{1}{2}\left\{|A_j^i(x_i)-A_j^i(x_i{}')|+\Big||A_j^i(x_i)+C_j^i(y)-1|-|A_j^i(x_i{}')+C_j^i(y)-1|\Big|\right\}\\
&\le|A_j^i(x_i)-A_j^i(x_i{}')|\le\Delta_{ij}|x_i-x_i{}'|
\end{aligned}$$

これは手順 1 の推論計算 α_j^i がリプシッツ連続であることを示している．ただし Δ_{ij} は前節で定義したリプシッツ定数である．次に，β_i について帰納法を用いる．各 $i=1,2,\ldots,n$ について，m_i-1 のとき成立していると仮定すると

$$\left|\bigoplus_{j=1}^{m_i-1}\alpha_j^i(x_i,y)-\bigoplus_{j=1}^{m_i-1}\alpha_j^i(x_i{}',y)\right|\le\Delta_{(m_i-1)}|x_i-x_i{}'|.$$

である．ただし，$\Delta_{(m_i-1)}$ はリプシッツ定数．このとき，

$$\begin{aligned}
&\left|\bigoplus_{j=1}^{m_i-1}\alpha_j^i(x_i,y)\oplus\alpha_{m_i}^i(x_i,y)-\bigoplus_{j=1}^{m_i-1}\alpha_j^i(x_i{}',y)\oplus\alpha_{m_i}^i(x_i{}',y)\right|\\
&\quad=\frac{1}{2}\left|\bigoplus_{j=1}^{m_i-1}\alpha_j^i(x_i,y)+\alpha_{m_i}^i(x_i,y)+1-\left|\bigoplus_{j=1}^{m_i-1}\alpha_j^i(x_i,y)+\alpha_{m_i}^i(x_i,y)-1\right|\right.\\
&\qquad\left.-\left\{\bigoplus_{j=1}^{m_i-1}\alpha_j^i(x_i{}',y)+\alpha_{m_i}^i(x_i{}',y)+1-\left|\bigoplus_{j=1}^{m_i-1}\alpha_j^i(x_i{}',y)+\alpha_{m_i}^i(x_i{}',y)-1\right|\right\}\right|\\
&\quad\le\left|\bigoplus_{j=1}^{m_i-1}\alpha_j^i(x_i,y)-\bigoplus_{j=1}^{m_i-1}\alpha_j^i(x_i{}',y)\right|+|\alpha_{m_i}^i(x_i,y)-\alpha_{m_i}^i(x_i{}',y)|\\
&\quad\le\Delta_{(m_i-1)}|x_i-x_i{}'|+\Delta_{im_i}|x_i-x_i{}'|=(\Delta_{(m_i-1)}+\Delta_{im_i})|x_i-x_i{}'|
\end{aligned}$$

である．ゆえに写像 $\beta_i(x_i,y)=\bigoplus_{j=1}^{m_i}\alpha_j^i(x_i,y)$ はリプシッツ連続である．ここで，

$$|\gamma_i(x_i)-\gamma_i(x_i{}')|\le\frac{4{r_2}^3}{\delta^2}m_i|\beta_i(x_i,y)-\beta_i(x_i{}',y)|$$

であるから [12]，$d_i < 1$ であることに注意すると，

$$
\begin{aligned}
|\rho_{\mathcal{AC}d}(x) - \rho_{\mathcal{AC}d}(x')| &\leq \sum_{i=1}^{n} d_i |\gamma_i(x_i) - \gamma_i({x_i}')| \\
&\leq \frac{4{r_2}^3}{\delta^2} \sum_{i=1}^{n} m_i |\beta_i(x_i, y) - \beta_i({x_i}', y)| \leq \frac{4{r_2}^3}{\delta^2} \sum_{i=1}^{n} \left\{ m_i(\Delta_{(m_i-1)} + \Delta_{im_i}) \right\} \|x - x'\|
\end{aligned}
$$

である．これは $\rho_{\mathcal{AC}d}$ が $[-r_1, r_1]^n$ 上のリプシッツ連続関数であることを示している．

（b）証明は省略する．(証明終)

上の命題4を命題1に適用して状態方程式の解の存在性を得るには，$\rho_{\mathcal{AC}d}$ が Φ に属していなければならない．つまり定義域が $[-r_1, r_1]^n$ でなく $\mathbb{R}^n$ である必要がある．本稿では紙面の都合上詳細を省くが，リプシッツ定数を変えることなく任意の有界なリプシッツ連続関数の定義域を $[-r_1, r_1]^n$ から $\mathbb{R}^n$ に拡張が可能である [13]．一般にその拡張は一意ではないが，$\tilde{\rho}_{\mathcal{AC}d}$ とすると命題1により状態方程式（1）に解 $x(t, x_0, \tilde{\rho}_{\mathcal{AC}d})$ が存在し，命題1（b）の式（3）によってそれは一意に定まる．したがって実用上 $\tilde{\rho}_{\mathcal{AC}d}$ と $\rho_{\mathcal{AC}d}$ を同一視しても混乱はない．以後定義域を $\mathbb{R}^n$ へ拡張した $\rho_{\mathcal{AC}d}$ に関して議論する．

推論計算 $\rho_{\mathcal{AC}d}$ をメンバシップ関数集合族 $\mathcal{L}_\delta$ 上の汎函数とみなすことにより，最適制御問題が変分問題に帰着され以下の命題を得る．

命題 5 式（4）の形で表される評価関数

$$
J = \int_{B_r} \int_0^T w(x(t, \zeta, \rho_{\mathcal{AC}d}), \rho_{\mathcal{AC}d}(x(t, \zeta, \rho_{\mathcal{AC}d}))) dt d\zeta
$$

は式（9）で定義されたコンパクト距離区間 $\mathcal{L}_\delta$ 上の汎関数として最小値（最大値）をもつ．

（証明）補題1を適用する．$\mathcal{L}_\delta$ がコンパクト距離空間であることは命題3にて証明済み．したがって写像 $\rho_{\mathcal{AC}d}$ について，$\mathcal{L}_\delta$ 上の連続汎函数であることを示せば十分である．すべての $i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m_i$ について，

$$
\left| {A_j^i}^k(x_i) \odot {C_j^i}^k(y) - A_j^i(x_i) \odot C_j^i(y) \right| \leq \left| {A_j^i}^k(x_i) - A_j^i(x_i) \right| + \left| {C_j^i}^k(y) - C_j^i(y) \right|,
$$

および

$$
\left| \bigoplus_{j=1}^{m_i} {\alpha_j^i}^k(x_i, y) - \bigoplus_{j=1}^{m_i} \alpha_j^i(x_i, y) \right| = \left| \sum_{j=1}^{m_i} {\alpha_j^i}^k(x_i, y) \wedge 1 - \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_j^i(x_i, y) \wedge 1 \right|
$$

であることに注意すると，

$$
\begin{aligned}
&|\rho_{\mathcal{A}^k\mathcal{C}^k d^k}(x) - \rho_{\mathcal{AC}d}(x)| \\
&\quad \leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{i=1}^{n} \left(2{r_2}^3 \sum_{j=1}^{m_i} \left| {A_j^i}^k(x_i) - A_j^i(x_i) \right| + {r_2}^2 \int_{-r_2}^{r_2} \sum_{j=1}^{m_i} \left| {C_j^i}^k(y) - C_j^i(y) \right| dy \right. \\
&\qquad \left. + 2r_2 \int_{-r_2}^{r_2} |y| \sum_{j=1}^{m_i} \left| {C_j^i}^k(y) - C_j^i(y) \right| dy \right) + {r_2}^2 \sum_{i=1}^{n} \left| {d_i}^k - d_i \right|
\end{aligned}
$$

を得る．$\mathcal{L}_\delta$ において $(\mathcal{A}^k, \mathcal{C}^k, d^k) \to (\mathcal{A}, \mathcal{C}, d)$ $(k \to \infty)$ ならば，

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in[-r_1,r_1]^n} |\rho_{\mathcal{A}^k\mathcal{C}^k d^k}(x) - \rho_{\mathcal{A}\mathcal{C}d}(x)| = 0$$

となり，汎函数としての $\rho_{\mathcal{A}\mathcal{C}d}$ の連続性が得られる．(証明終)

この命題により，評価関数を最小（最大）にするファジィ許容制御則 $(\mathcal{A}, \mathcal{C}, d)$ の存在，つまりこれらのファジィ集合によって構成される SIRMs の存在が確認された．

V.　まとめ

限界積，限界和をファジィ演算に用いた SIRMs ファジィ推論法について考察した．推論計算は各ルールと前件部変数値との一致度，各ルールの推論結果の統合，非ファジィ化などのいくつかの手順を表す計算の合成関数となっており，前件部変数に対してリプシッツ連続であること，およびファジィ許容制御族上の連続汎関数であることが明らかになった．この事実を変分問題に適用して，SIRMs ファジィ推論を用いたフィードバック制御に対する評価関数値に最小値または最大値が存在することを証明した．これは SIRMs を構成するファジィ集合（メンバシップ関数）の対の中に最小（最大）値を与えるものが 1 つ以上存在することと同義である．平易な表現を用いると，最適制御を与える SIRMs が存在するということである．

最適解の解法が今後の課題として挙げられる．評価関数の台集合であるファジィ許容制御族のコンパクト性などの位相的性質は，解の逐次近似手法の収束を実現するために有効的であると考える．また実制御に本研究で扱った推論法を適用し，通常の場合との計算速度や推論結果の比較検討を行う必要がある．

参考文献

1) L. A. Zadeh, “Fuzzy Sets,” Information and Control, vol. 8, pp.338–353. 1965.

2) L. A. Zadeh, “Fuzzy algorithms,” Information and Control, 12, pp.94–102, 1968.

3) E. H. Mamdani, “Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant,” Proc. IEE 121, No. 12, pp.1585–1588, 1974.

4) 湯場崎直養，易 建強，廣田薫, “複数入力ファジィ制御のための単一入力ルール群結合型ファジィ推論モデルの提案,” 日本ファジィ学会誌, vol. 9, no. 5, pp.699–709, 1997.

5) 湯場崎直養，易 建強，廣田薫, “動的重視度を用いた SIRMs ファジィ推論モデル,” 日本ファジィ学会誌, vol. 10, no. 3, pp.522–531, 1998.

6) H. Seki, H. Ishii and M. Mizumoto, “On the generalization of single input rule modules connected type fuzzy reasoning method,” Proc. of Joint 3rd International Conference on Soft Computing and Intelligent Systems and 7th International Symposium on advanced Intelligent Systems (SCIS&ISIS 2006), pp.30–34, 2006.

7) 水本雅晴，“ファジィ制御の改善法（IV）（代数積-加算-重心法による場合）,” 日本ファジィ学会主催・第6回「ファジィシステムシンポジウム」講演論文集，pp.9–13, 1990.

8) M. Mizumoto, “Fuzzy Conditional lnference under Max-$\odot$ Composition,” Information Sciences, 27(2), 183–209, 1982.

9) T. Mitsuishi, K. Wasaki, J. Kawabe, N. P. Kawamoto, Y. Shidama, “Fuzzy optimal control in L^2 space,” In: Proc. 7th IFAC Symposium Artificial Intelligence in Real-Time Control, pp.173–177, 1998.

10) T. Mitsuishi, J. Kawabe, K. Wasaki and Y. Shidama, “Optimization of Fuzzy Feedback Control Determined by Product-Sum-Gravity Method,” Journal of Nonlinear and Convex Analysis, Vol. 1, No. 2, pp.201–211, 2000.

11) T. Mitsuishi, Y. Shidama, “Optimal Control Using Functional Type SIRMs Fuzzy Reasoning Method,” In: T. Honkela et al. (Eds.): ICANN 2011, Part II, LNCS 6792, pp.237–244, Springer, Heidelberg 2011.

12) T. Mitsuishi, T. Terashima, T. Homma, Y. Shidama, “Fuzzy Approximate Reasoning Using Single Input Rule Modules in L^∞ Space,” Proc. of IEEE AFRICON, CD-ROM, 2011.

13) R. K. Miller and A. N. Michel, “Ordinary Differential Equations,” Academic Press, New York, 1982.

14) F. Riesz, B. Sz.-Nagy, “Functional Analysis,” Dover Publications, New York, 1990.

15) N. Dunford and J.T. Schwartz, “Linear Operators Part I: General Theory”, John Wiley & Sons, New York, 1988.

16) G. Metcalfe, N. Olivetti, D. Gabbay, Proof Theory for Fuzzy Logics, Springer-Verlag, 2009.