流通科学大学論集—経済・情報・政策編—第 22 巻第 1 号，125-131（2013）

階層ごとに異なる部下数を持つ組織構造への関係追加問題 — 総頂点間短縮経路長の定式化 —

A Problem of Adding Relation to an Organization Structure with Different Numbers of Subordinates at Each Level — Formulation of Total Shortening Distance —

澤田　清*

Kiyoshi Sawada

本論文では、階層ごとに部下数が異なるピラミッド組織構造に対する関係追加モデルを提案した。すなわち、組織構造を深さ m の各頂点が $P(m)$ の子を持つ高さ H の根付き木として表し、同じ深さの２頂点間に一辺を追加するモデルを考えた。組織全体の情報伝達効率を最大にする関係追加位置を求めることを意図して、総頂点間短縮経路長を定式化し、総頂点間短縮経路長を最大にする辺の追加位置について論じた。

キーワード： ピラミッド組織構造、情報伝達、関係追加、総頂点間短縮経路長、部下数

I.　はじめに

ピラミッド組織構造は上下間の一元的な命令系統に基づく階層構造であり、構成メンバーを頂点に、上下のメンバー間関係を辺に対応させせると、根付き木として表すことができる[1)]。このとき、根付き木の各頂点間の経路は組織内のメンバー間の関係をたどる情報伝達経路に対応している。また、根付き木に辺を追加することは、直接の上下関係以外の追加的関係の形成に相当する。筆者らは、完全 K 分木型のピラミッド組織構造を対象として、メンバー間への三つの関係追加モデル、(1) 同じ階層の２メンバー間に関係を追加する、(2) 同じ階層の全メンバー間に関係を追加する、(3) 同じ階層で同じ上司を持つメンバー間に関係を追加する、を提案した[2)]。そこでは、組織全体の情報伝達が最も効率的になるような追加関係を求めることを意図して、完全 K 分木の全頂点対の最短経路長を合計した総頂点間経路長が最小となるような関係追加階層を解析的に求めた。ここで、完全 K 分木は、すべての葉の深さが同じで、かつすべての内部頂点の子の数が K である K 分木を指す。また、深さは根からその頂点までの経路長（経路の辺の数）を表す[4)]。

上述した関係追加モデルは各階層で同じ部下数を持つ組織構造を対象としており、階層によって部下数が異なる組織構造には適用できない。本研究では、より現実的な組織構造への適用を意図して、各メンバーの部下数が階層ごとに異なる組織構造に対するモデルを提案する。ここでは、

*流通科学大学総合政策学部、〒 651-2188　神戸市西区学園西町 3-1

（2013 年 4 月 5 日受理）

対象とする組織構造を深さ m の各頂点の子の数が $P(m)$ である根付き木として表すこととする。ただし、$P(m) \geq 2$ とする。本論文では、この組織構造に対して、同じ階層の 2 メンバー間に関係を 1 つ追加する、すなわち同じ深さの 2 頂点間に辺を 1 本追加するモデルを提案する。

本モデルが対象とする組織構造の 2 頂点 n_i と n_j の間の最短経路長を $l_{i,j}$ とすると（ただし $l_{i,j} = l_{j,i}$、$l_{i,i} = 0$）、$\sum_{i<j} l_{i,j}$ は総頂点間経路長を表す。また、上述したような辺追加後の 2 頂点 n_i、n_j 間の最短経路長を $l'_{i,j}$ とすると、$l_{i,j} - l'_{i,j}$ は辺追加により 2 頂点間の最短経路長がどれだけ短縮されたかを表す。ここでは、これを 2 頂点間の短縮経路長と呼ぶ。さらに、全頂点間の短縮経路長の総和 $\sum_{i<j}(l_{i,j} - l'_{i,j})$ を、総頂点間短縮経路長と定義する。ここで、総頂点間短縮経路長を最大にすることは、総頂点間経路長を最小にすることを意味する。

II. で上述した組織構造への 1 辺追加問題について総頂点間短縮経路長を定式化し、III. で総頂点間短縮経路長を最大にする 2 頂点の最深共通祖先の深さを明らかにする。さらに、IV. で $P(m) = m+2$ とした場合の総頂点間短縮経路長の数値例を示し、最適な追加辺の深さを求める。

II.　総頂点間短縮経路長の定式化

ここでは、高さ $H(H = 1, 2, \ldots)$ で、深さ $m(m = 0, 1, \ldots, H-1)$ の各頂点が $P(m)$ の子を持つ根付き木に対して、同じ深さ $N(N = 1, 2, \ldots, H)$ の 2 頂点間に一辺を追加する場合の総頂点間短縮経路長を定式化する。ただし、$P(m) \geq 2$ とする。深さ N の 2 頂点間に一辺を追加する方法は N 通りあるが、ここでは 2 頂点の最深共通祖先の深さを $L(L = 0, 1, 2, \ldots, N-1)$ として、N 通りの辺追加方法を表現する。

辺追加により隣接化される 2 頂点をそれぞれ v_0^X、v_0^Y とし、v_0^X と v_0^Y の祖先のうち深さ $N-k(k = 1, 2, \ldots, N-L-1)$ の頂点をそれぞれ v_k^X、v_k^Y とする。また、v_0^X と v_0^Y の子孫の集合をそれぞれ V_0^X、V_0^Y とする。ただし、子孫はその頂点自身も含む。さらに、v_k^X の子孫の集合から v_{k-1}^X の子孫の集合を除いた頂点の集合を V_k^X、v_k^Y の子孫の集合から v_{k-1}^Y の子孫の集合を除いた頂点の集合を V_k^Y とする。

このとき、総頂点間短縮経路長 $S_H(N, L)$ は、次の三つの短縮経路長の総和で表される。

(i) V_0^X の頂点と V_0^Y の頂点の間の短縮経路長の和

(ii) V_0^X の頂点と $V_k^Y(k = 1, 2, \ldots, N-L-1)$ の頂点間、および V_0^Y の頂点と $V_k^X(k = 1, 2, \ldots, N-L-1)$ の頂点間の短縮経路長の和

(iii) $V_k^X(k = 1, 2, \ldots, N-L-1)$ の頂点と $V_k^Y(k = 1, 2, \ldots, N-L-1)$ の頂点の間の短縮経路長の和

V_0^X の頂点と V_0^Y の頂点の間の短縮経路長の和は、

$$A_H(N,L) = \left(\sum_{i=N}^{H-1}\prod_{j=N}^{i}P(j)+1\right)^2(2N-2L-1) \tag{1}$$

と表される。ただし、$\sum_{i=h}^{h-1}\cdot = 0$ と定義する。次に、V_0^X の頂点と $V_k^Y(k=1,2,\ldots,N-L-1)$ の頂点間、および V_0^Y の頂点と $V_k^X(k=1,2,\ldots,N-L-1)$ の頂点間の短縮経路長の和は、

$$\begin{aligned} &B_H(N,L)\\ &= 2\left(\sum_{i=N}^{H-1}\prod_{j=N}^{i}P(j)+1\right)\sum_{i=L+1}^{N-1}\left\{(P(i)-1)\left(\sum_{j=i+1}^{H-1}\prod_{k=i+1}^{j}P(k)+1\right)+1\right\}(2i-2L-1), \end{aligned} \tag{2}$$

$V_k^X(k=1,2,\ldots,N-L-1)$ の頂点と $V_k^Y(k=1,2,\ldots,N-L-1)$ の頂点の間の短縮経路長の和は、

$$\begin{aligned} &C_H(N,L)\\ &= \sum_{i=L+2}^{N-1}\left\{(P(i)-1)\left(\sum_{j=i+1}^{H-1}\prod_{k=i+1}^{j}P(k)+1\right)+1\right\}\\ &\quad\times\sum_{j=N+L-i+1}^{N-1}\left\{(P(j)-1)\left(\sum_{k=j+1}^{H-1}\prod_{l=j+1}^{k}P(l)+1\right)+1\right\}(2i+2j-2N-2L-1) \end{aligned} \tag{3}$$

となる。ただし、$\sum_{i=h}^{h-2}\cdot = 0$ とする。

以上より、総頂点間短縮経路長 $S_H(N,L)$ は、

$$\begin{aligned} &S_H(N,L)\\ &= A_H(N,L)+B_H(N,L)+C_H(N,L)\\ &= \left(\sum_{i=N}^{H-1}\prod_{j=N}^{i}P(j)+1\right)^2(2N-2L-1)\\ &\quad+2\left(\sum_{i=N}^{H-1}\prod_{j=N}^{i}P(j)+1\right)\sum_{i=L+1}^{N-1}\left\{(P(i)-1)\left(\sum_{j=i+1}^{H-1}\prod_{k=i+1}^{j}P(k)+1\right)+1\right\}(2i-2L-1)\\ &\quad+\sum_{i=L+2}^{N-1}\left\{(P(i)-1)\left(\sum_{j=i+1}^{H-1}\prod_{k=i+1}^{j}P(k)+1\right)+1\right\}\\ &\quad\times\sum_{j=N+L-i+1}^{N-1}\left\{(P(j)-1)\left(\sum_{k=j+1}^{H-1}\prod_{l=j+1}^{k}P(l)+1\right)+1\right\}(2i+2j-2N-2L-1) \end{aligned} \tag{4}$$

と定式化される。

III. 最適な最深共通祖先の深さ

ここでは、辺追加深さ $N(N=1,2,\ldots,H)$ が与えられた場合に $S_H(N,L)$ を最大にする 2 頂点の最深共通祖先の深さ L^* を求める。

定理 1 各 N に対して、$S_H(N,L)$ を最大にする L は $L^*=0$ である。

証明

(I) $N=1$ のとき、$L=0$ のみであるので、$L^*=0$ である。

(II) $N\geq 2$ のとき、

$$
\begin{aligned}
& S_H(N,L+1)-S_H(N,L) \\
= \; & -2\left(\sum_{i=N}^{H-1}\prod_{j=N}^{i}P(j)+1\right)^2 \\
& -2\left(\sum_{i=N}^{H-1}\prod_{j=N}^{i}P(j)+1\right)\left\{(P(L+1)-1)\left(\sum_{j=L+2}^{H-1}\prod_{k=L+2}^{j}P(k)+1\right)+1\right\} \\
& -4\left(\sum_{i=N}^{H-1}\prod_{j=N}^{i}P(j)+1\right)\sum_{i=L+2}^{N-1}\left\{(P(i)-1)\left(\sum_{j=i+1}^{H-1}\prod_{k=i+1}^{j}P(k)+1\right)+1\right\} \\
& -\sum_{i=L+3}^{N-1}\left\{(P(i)-1)\left(\sum_{j=i+1}^{H-1}\prod_{k=i+1}^{j}P(k)+1\right)+1\right\} \\
& \times\left[\left\{(P(N+L-i+1)-1)\left(\sum_{k=N+L-i+2}^{H-1}\prod_{l=N+L-i+2}^{k}P(l)+1\right)+1\right\}\right. \\
& \left.+2\sum_{j=N+L-i+2}^{N-1}\left\{(P(j)-1)\left(\sum_{k=j+1}^{H-1}\prod_{l=j+1}^{k}P(l)+1\right)+1\right\}\right] \\
& +t_H(N,L) \\
< \; & 0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

となるので、$L^*=0$ である。ただし、式 (5) 中の $t_H(N,L)$ は、$L=0,1,2,\ldots,N-3$ のとき、

$$
\begin{aligned}
t_H(N,L) \;=\; & -\left\{(P(L+2)-1)\left(\sum_{j=L+3}^{H-1}\prod_{k=L+3}^{j}P(k)+1\right)+1\right\} \\
& \times\left\{(P(N-1)-1)\left(\sum_{k=N}^{H-1}\prod_{l=N}^{k}P(l)+1\right)+1\right\},
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$L=N-2$ のとき、

$$
t_H(N,L)=0 \tag{7}
$$

である。（証明終わり）

定理1は、同じ階層の2メンバー間に関係を追加する場合、トップ以外の共通の上司を持たないメンバー間での関係追加が、組織全体の情報伝達効率を最もよくすることを表している。

$L=0$ のときの総頂点間短縮経路長を $\hat{S}_H(N)$ と表すこととすると、$\hat{S}_H(N)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\hat{S}_H(N) &= S_H(N,0) \\
&= \left(\sum_{i=N}^{H-1}\prod_{j=N}^{i}P(j)+1\right)^2(2N-1) \\
&\quad +2\left(\sum_{i=N}^{H-1}\prod_{j=N}^{i}P(j)+1\right)\sum_{i=1}^{N-1}\left\{(P(i)-1)\left(\sum_{j=i+1}^{H-1}\prod_{k=i+1}^{j}P(k)+1\right)+1\right\}(2i-1) \\
&\quad +\sum_{i=2}^{N-1}\left\{(P(i)-1)\left(\sum_{j=i+1}^{H-1}\prod_{k=i+1}^{j}P(k)+1\right)+1\right\} \\
&\quad \times\sum_{j=N-i+1}^{N-1}\left\{(P(j)-1)\left(\sum_{k=j+1}^{H-1}\prod_{l=j+1}^{k}P(l)+1\right)+1\right\}(2i+2j-2N-1). \qquad (8)
\end{aligned}$$

IV. 数値例

ここでは、数値例を用いて、$\hat{S}_H(N)$ を最大にする最適な辺追加深さ N^* について考察する。ただし、深さ $m(m=0,1,\ldots,H-1)$ の各頂点が $m+2$ の子を持つ根付き木を対象とする。すなわち、

$$P(m)=m+2 \qquad (9)$$

とする。これは、トップの部下数が2、その下の階層の部下数が3、さらにその下の階層の部下数が4というように、下の階層ほど部下数が1ずつ増加する組織構造である。

このときの総頂点間短縮経路長 $\hat{S}_H(N)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}
&\hat{S}_H(N) \\
&= \left(\sum_{i=N}^{H-1}\prod_{j=N}^{i}(j+2)+1\right)^2(2N-1) \\
&\quad +2\left(\sum_{i=N}^{H-1}\prod_{j=N}^{i}(j+2)+1\right)\sum_{i=1}^{N-1}\left\{(i+1)\left(\sum_{j=i+1}^{H-1}\prod_{k=i+1}^{j}(k+2)+1\right)+1\right\}(2i-1) \\
&\quad +\sum_{i=2}^{N-1}\left\{(i+1)\left(\sum_{j=i+1}^{H-1}\prod_{k=i+1}^{j}(k+2)+1\right)+1\right\}
\end{aligned}$$

表 1: 総頂点間短縮経路長 $\hat{S}_H(N)$

N	$H=1$	$H=2$	$H=3$	$H=4$	$H=5$	$H=6$	$H=7$	$H=8$
1	1	16	256	5776	190096	8737936	534349456	41843157136
2	–	9	185	4425	147465	6793545	415584585	32544495945
3	–	–	67	1837	62857	2909197	178089517	13947480397
4	–	–	–	538	19870	931354	57121306	4474677274
5	–	–	–	–	4992	244210	15070434	1181504850
6	–	–	–	–	–	54087	3418791	268847367
7	–	–	–	–	–	–	679033	54120403
8	–	–	–	–	–	–	–	9759060

$$\times \sum_{j=N-i+1}^{N-1} \left\{ (j+1) \left(\sum_{k=j+1}^{H-1} \prod_{l=j+1}^{k} (l+2) + 1 \right) + 1 \right\} (2i+2j-2N-1)$$

$$\begin{aligned}
= \; & \left(\sum_{i=N}^{H-1} \frac{(i+2)!}{(N+1)!} + 1 \right)^2 (2N-1) \\
& + 2 \left(\sum_{i=N}^{H-1} \frac{(i+2)!}{(N+1)!} + 1 \right) \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ (i+1) \left(\sum_{j=i+1}^{H-1} \frac{(j+2)!}{(i+2)!} + 1 \right) + 1 \right\} (2i-1) \\
& + \sum_{i=2}^{N-1} \left\{ (i+1) \left(\sum_{j=i+1}^{H-1} \frac{(j+2)!}{(i+2)!} + 1 \right) + 1 \right\} \\
& \times \sum_{j=N-i+1}^{N-1} \left\{ (j+1) \left(\sum_{k=j+1}^{H-1} \frac{(k+2)!}{(j+2)!} + 1 \right) + 1 \right\} (2i+2j-2N-1). \qquad (10)
\end{aligned}$$

表 1 に、総頂点間短縮経路長 $\hat{S}_H(N)$ の数値例を示す。ただし、$H=1,2,\ldots,8$、$N=1,2,\ldots,H$ である。

表 1 より、$H=1,2,\ldots,8$ のとき、高さ H に関わらず $\hat{S}_H(N)$ を最大にする辺追加深さは $N^*=1$ であることがわかる。これは、上述した組織構造に対して同じ階層の 2 メンバー間で関係を追加する場合、階層数の少ない組織構造では、トップの一つ下の階層で関係を追加すれば最も効率的であることを表している。

V. おわりに

本研究では、階層ごとに部下数が異なるピラミッド組織構造に対する関係追加モデルを提案した。すなわち、組織構造を深さ m の各頂点が $P(m)$ の子を持つ高さ H の根付き木として表し、同じ深さ N の 2 頂点間に一辺を追加するモデルを考えた。組織全体の情報伝達効率を最大にする関係追加位置を求めることを意図して、総頂点間短縮経路長を定式化し、総頂点間短縮経路長を最

大にする追加辺について論じた。定理1により、同じ階層の2メンバー間に関係を追加する場合、トップ以外の共通の上司を持たないメンバー間での関係追加が組織全体の情報伝達効率を最もよくすることが明らかになった。さらに、$P(m) = m + 2$、すなわち深さ m の各頂点が $m + 2$ の子を持つ組織構造の場合の数値例を示した。その結果、階層数の少ない組織構造では、トップの一つ下の階層で関係を追加すれば最も効率的であることがわかった。総頂点間短縮経路長を最大にする最適な N^* に関する数学的な解析については、今後の課題としたい。

参考文献

1) Y. Takahara, M. Mesarovic : Organization Structure: Cybernetic Systems Foundation, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York (2003).

2) K. Sawada, R. Wilson : "Models of adding relations to an organization structure of a complete K-ary tree", *European Journal of Operational Research*, Vol.174, No.3 (2006), pp.1491–1500.

3) K. Sawada : "A model of adding relations in two levels to an organization structure of a complete binary tree", *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol.4, No.5 (2008), pp.1135–1140.

4) T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein : Introduction to Algorithms, 2nd ed., MIT Press, Cambridge, Mass. (2001).