流通科学大学論集—人間・社会・自然編—第 23 巻第 2 号，67-73（2011）

＜資料＞

関手と自然変換の３つ組について

The Triple of a Functor and Natural Transformations

又賀　喜治*
Yoshiharu Mataga

半単体複体の圏 $\mathcal{S}$ において，単位要素をもつ可換環 $\boldsymbol{R}$ を用いて，完備化と呼ばれる関手 $\boldsymbol{R}_\infty : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ と，2 つの自然変換 $Id \to \boldsymbol{R}_\infty$，$\boldsymbol{R}_\infty^2 \to \boldsymbol{R}_\infty$ が構成される。本資料では，それら関手と自然変換が 3 つ組となることの証明を，参考文献に示されている方針に従い行う。特に，その方針の中では言及されていないが，要となる一つの事項を明示的に要請し証明を行う。

キーワード：半単体複体，余半単体複体，完備化，関手と自然変換の 3 つ組

第 1 節　目的

各種記号の説明は第 2 節以降で行うこととし，ここでは本資料の目的を記す。関手と自然変換の組 $\{\boldsymbol{R}_\infty, \phi, \psi\}$ が 3 つ組となることの証明の方針は参考文献 1) に述べられている。本資料の目的は，参考文献 2) の資料に続く議論を進め，1) に述べられている方針に基づく証明を完結することである。

1) の方針に従って証明を行うときに，筆者にはそのままでは解決しがたいところがあった。それは，自然変換 $\psi : \boldsymbol{R}_\infty^2 \to \boldsymbol{R}_\infty$ は対構成と呼ばれる方法を利用して構成されるのであるが，その対構成と写像の合成との関係を見極めるところであった。具体的には，本資料第 2 節の，関手と自然変換の 3 つ組の一般論における (2.02) と (2.03) に対応する次の 2 つの図式の可換性を，直接には示しがたい点である。

$$
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{R}_\infty^3 Y \arrow[r, "\boldsymbol{R}_\infty \psi"] \arrow[d, "\psi \boldsymbol{R}_\infty"'] & \boldsymbol{R}_\infty^2 Y \arrow[d, "\psi"] \\
\boldsymbol{R}_\infty^2 Y \arrow[r, "\psi"] & \boldsymbol{R}_\infty Y
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{R}_\infty Y \arrow[r, "\boldsymbol{R}_\infty \phi"] \arrow[d, "\phi \boldsymbol{R}_\infty"'] \arrow[dr, "id_{\boldsymbol{R}_\infty Y}"] & \boldsymbol{R}_\infty^2 Y \arrow[d, "\psi"] \\
\boldsymbol{R}_\infty^2 Y \arrow[r, "\psi"] & \boldsymbol{R}_\infty Y
\end{tikzcd}
$$

そのために，一般論として対構成が満たすべき性質を，第 2 節 (iv) の形で要請した。この要請が，3 つ組となるための十分条件となることを補助定理 2–1 で記した。第 4 節において，関手 $\boldsymbol{R}_\infty$ に付随する対構成がこの性質 (iv) を満たすことを示し，$\{\boldsymbol{R}_\infty, \phi, \psi\}$ が 3 つ組となることを結論する補題 4–1 を導いた。

* 流通科学大学商学部、〒 651-2188　神戸市西区学園西町 3-1

（2010 年 9 月 7 日受理）

第 2 節　関手と自然変換の 3 つ組

$\mathcal{C}$ を圏とし，$T:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ を関手，$Id:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ を恒等関手とする。2 つの自然変換

$$\phi : Id \longrightarrow T\ , \qquad \psi : T^2 \longrightarrow T$$

が備わっており，下記 (2.01)，(2.02)，(2.03) の 3 つの関係式が満たされるとき，$\{T,\phi,\psi\}$ は 3 つ組と呼ばれる。以下の式中 $\circ$ は射の合成を表す記号とする。

(2.01) $$T\phi\circ\phi = \phi T\circ\phi$$

(2.02) $$\psi\circ T\psi = \psi\circ\psi T$$

(2.03) $$\psi\circ T\phi = \text{恒等自然変換} = \psi\circ\phi T$$

本節では，関手 $T:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ と (2.01) 式を満たす自然変換 $\phi: Id\to T$ だけが与えられている場合に，ある条件のもとで自然変換 $\psi: T^2\to T$ を構成し，$\{T,\phi,\psi\}$ が 3 つ組となることを示す。議論の中心は，このような自然変換 $\psi: T^2\to T$ を構成できるための十分条件を求めることである。

関手 $T:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ と自然変換 $\phi: Id\to T$ が与えられており，それらは (2.01) の関係を満たすとする。任意の射の対 $f: X\to TY\ \in\mathcal{C}$ と $g: W\to TX\ \in\mathcal{C}$ に対して射

(2.04) $$c(f,g): W\to TY\ \in\mathcal{C}$$

を対応させる規則 c が定義されており，下記の (i)，(ii)，(iii) の性質を持つとする。c は対構成と呼ばれる [1)Ch.I,§5]。

(i) $\alpha: X\to X'$，$\beta: Y\to Y'$，$\omega: W\to W'$ について命題 (2.05) が成り立つ。

(2.05)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & TY \arrow[d, "T\beta"] & W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\omega"'] & TX \arrow[d, "T\alpha"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & TY' & W' \arrow[r, "g'"'] & TX' \end{tikzcd} \text{は可換} \Longrightarrow \begin{tikzcd} W \arrow[r, "{c(f,g)}"] \arrow[d, "\omega"'] & TY \arrow[d, "T\beta"] \\ W' \arrow[r, "{c(f',g')}"'] & TY' \end{tikzcd} \text{は可換}$$

(ii) 任意の $f: X\to TY$，$g: W\to TX$，$h: V\to TW$ に対して等式 (2.06) が成り立つ。

(2.06) $$c(f,c(g,h)) = c(c(f,g),h): V\longrightarrow TY$$

(iii) 任意の $f: X\to TY$ に対して等式 (2.07) が成り立つ。

(2.07) $$c(f,\phi_X) = f = c(\phi_Y, f)$$

性質 (i)，(ii)，(iii) が満たされるとき，任意の $Z\in\mathcal{C}$ に対して射 $\psi_Z: T^2Z\to TZ\ \in\mathcal{C}$ を，恒等射の対 $id_{TZ}: TZ\to TZ$，$id_{T^2Z}: T^2Z\to T^2Z$ を用いて，次式 (2.08) により定義する。

(2.08) $$\psi_Z = c(id_{TZ}, id_{T^2Z})$$

(2.08) により自然変換 $\psi: T^2\to T$ が得られる。ψ について次の性質 (iv) を考える。

(iv) 任意の $f: X\to TY$，恒等射 $id_{TX}: TX\to TX$ と $\psi_Y: T^2Y\to TY$ に対して

(2.09) $$c(f, id_{TX}) = \psi_Y\circ Tf: TX\longrightarrow TY$$

が成り立つ。また，恒等射 $id_{TX}: TX\to TX$，任意の $g: W\to T^2X$ と $\psi_X: T^2X\to TX$ に対して

(2.10) $$c(id, g) = \psi_X \circ g : W \longrightarrow TX$$

が成り立つ。

以上の説明のもとで次の補助定理 2–1 が成り立つ。

補助定理 2–1　T，ϕ，c が性質 (i)，(ii)，(iii) をもち，(2.08) により定義される ψ が性質 (iv) を満たすならば，$\{T, \phi, \psi\}$ は 3 つ組となる。

証明　任意の $X \in \mathcal{C}$ に対して (2.02) 式が成り立つことは，$id_{TX} : TX \to TX$，$id_{T^2X} : T^2X \to T^2X$，$id_{T^3X} : T^3X \to T^3X$ に対して(ii)，(iii)，(iv) の性質を組み合わせ，次のように示される。

$$\begin{aligned}\psi_X \circ T\psi_X &= c(\psi_X, id_{T^3X}) = c(c(id_{TX}, id_{T^2X}), id_{T^3X}) \\ &= c(id_{TX}, c(id_{T^2X}, id_{T^3X})) = c(id_{TX}, \psi_{TX}) = \psi_X \circ \psi_{TX}\end{aligned}$$

任意の $X \in \mathcal{C}$ について (2.03) 式が成り立つことは，(iii) と (iv) の性質を組み合わせることにより次の 2 つの等式から得られる。

$$\psi_X \circ T\phi_X = c(\phi_X, id_{TX}) = id_{TX}$$
$$\psi_X \circ \phi_{TX} = c(id_{TX}, \phi_{TX}) = id_{TX}$$

証明終わり

第 3 節　写像複体

第 3 節，4 節において，$\mathcal{S}$ は半単体複体の圏を表し，$c\mathcal{S}$ は余半単体複体の圏を表すとする。

$\underset{\sim}{X}$，$\underset{\sim}{Y} \in c\mathcal{S}$ に対して，$\hom(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{Y})$ は次のように定義される半単体複体である [1)Ch.VIII]。$\hom(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{Y})$ の n 単体の集合 $\hom(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{Y})_n$ は，余写像

$$\Delta[n] \times \underset{\sim}{X} \longrightarrow \underset{\sim}{Y} \qquad \in c\mathcal{S}$$

すべてからなる集合であり，写像の合成

$$\Delta[n-1] \times \underset{\sim}{X} \xrightarrow{\delta^i \times id} \Delta[n] \times \underset{\sim}{X} \longrightarrow \underset{\sim}{Y}$$
$$\Delta[n+1] \times \underset{\sim}{X} \xrightarrow{\sigma^j \times id} \Delta[n] \times \underset{\sim}{X} \longrightarrow \underset{\sim}{Y}$$

をそれぞれ面作用素 ∂_i，退化作用素 s_j とする。ここで，$\delta^i : \Delta[n-1] \to \Delta[n]$ $(0 \leqq i \leqq n)$，$\sigma^j : \Delta[n+1] \to \Delta[n]$ $(0 \leqq j \leqq n)$ は，標準単体 $\iota_{n-1} \in \Delta[n-1]$，$\iota_n \in \Delta[n]$，$\iota_{n+1} \in \Delta[n+1]$ に対して，それぞれ $\delta^i(\iota_{n-1}) = \partial_i(\iota_n)$，$\sigma^j(\iota_{n+1}) = s_j(\iota_n)$ により定義される単体写像である。

X，$Y \in \mathcal{S}$ に対して，$\hom(X, Y)$ は $\mathcal{S}$ における写像複体を表すとする。$X \in \mathcal{S}$，$\underset{\sim}{Y} \in c\mathcal{S}$ に対して $\hom(X, \underset{\sim}{Y})$ は，写像複体 $\hom(X, \underset{\sim}{Y}^n)$ を余次元 n の半単体複体とする余半単体複体を表す。$\hom(X, \underset{\sim}{Y})$ における余面作用素，余退化作用素は，$\underset{\sim}{Y}$ から標準的に導かれるものとする。本資料では，記号の煩雑さを避けるために次に記すように，3 種の関手を同じ記号 hom(,) で表す。ただし，hom(,) の括弧内に記入される 2 つの対象に注意することにより，下記のように区別する。ここで，$\mathcal{S}^o$，$c\mathcal{S}^o$ はそれぞれ $\mathcal{S}$，$c\mathcal{S}$ の双対圏を表す。

$$\hom : \mathcal{S}^o \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S} \qquad \hom : \mathcal{S}^o \times c\mathcal{S} \longrightarrow c\mathcal{S} \qquad \hom : c\mathcal{S}^o \times c\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$$

$X \in \mathcal{S}$，$\underset{\sim}{Y} \in c\mathcal{S}$，$\underset{\sim}{Z} \in c\mathcal{S}$ とし，4 つの写像

$$\begin{aligned}
\Phi : \mathrm{hom}(X, \mathrm{hom}(\underset{\sim}{Y}, \underset{\sim}{Z})) &\longrightarrow \mathrm{hom}(\underset{\sim}{Y} \times X, \underset{\sim}{Z}) \\
\Psi : \mathrm{hom}(\underset{\sim}{Y} \times X, \underset{\sim}{Z}) &\longrightarrow \mathrm{hom}(X, \mathrm{hom}(\underset{\sim}{Y}, \underset{\sim}{Z})) \\
\Phi' : \mathrm{hom}(\underset{\sim}{Y}, \mathrm{hom}(X, \underset{\sim}{Z})) &\longrightarrow \mathrm{hom}(\underset{\sim}{Y} \times X, \underset{\sim}{Z}) \\
\Psi' : \mathrm{hom}(\underset{\sim}{Y} \times X, \underset{\sim}{Z}) &\longrightarrow \mathrm{hom}(\underset{\sim}{Y}, \mathrm{hom}(X, \underset{\sim}{Z}))
\end{aligned}$$

を以下の通り定義する。

(i)［Φ の定義］$f : \Delta[p] \times X \to \mathrm{hom}(\underset{\sim}{Y}, \underset{\sim}{Z}) \in \mathrm{hom}(X, \mathrm{hom}(\underset{\sim}{Y}, \underset{\sim}{Z}))_p$ とする。$\Phi(f) : \Delta[p] \times \underset{\sim}{Y} \times X \to \underset{\sim}{Z} \in c\mathcal{S}$ を，$(\alpha, y, x) \in (\Delta[p] \times \underset{\sim}{Y}^n \times X)_q$ に対して，次式により定義する。

$$\Phi(f)(\alpha, y, x) = f(\alpha, x)(\iota_q, y) \in \underset{\sim}{Z}_q^n$$

(ii)［Ψ の定義］$g : \Delta[p] \times \underset{\sim}{Y} \times X \to \underset{\sim}{Z} \in \mathrm{hom}(\underset{\sim}{Y} \times X, \underset{\sim}{Z})_p$ とする。$\Psi(g) : \Delta[p] \times X \to \mathrm{hom}(\underset{\sim}{Y}, \underset{\sim}{Z}) \in \mathcal{S}$ を，$(\beta, x) \in (\Delta[p] \times X)_q$，$(\gamma, y) \in (\Delta[q] \times \underset{\sim}{Y}^n)_r$ に対して，次式により定義する。

$$\Psi(g)(\beta, x)(\gamma, y) = g(\bar{\beta}(\gamma), y, \bar{x}(\gamma)) \in \underset{\sim}{Z}_r^n$$

ここで，$\bar{\beta} : \Delta[q] \to \Delta[p]$，$\bar{x} : \Delta[q] \to X$ はそれぞれ，$\beta \in \Delta[p]_q$，$x \in X_q$ から導かれる標準的写像とする。

(iii)［Φ' の定義］$f' : \Delta[p] \times \underset{\sim}{Y} \to \mathrm{hom}(X, \underset{\sim}{Z})) \in \mathrm{hom}(\underset{\sim}{Y}, \mathrm{hom}(X, \underset{\sim}{Z}))_p$ とする。$\Phi'(f') : \Delta[p] \times \underset{\sim}{Y} \times X \to \underset{\sim}{Z}$ を，$(\alpha, y, x) \in (\Delta[p] \times \underset{\sim}{Y}^n \times X)_q$ に対して，次式により定義する。

$$\Phi'(f')(\alpha, y, x) = f'(\alpha, y)(\iota_q, x) \in \underset{\sim}{Z}_q^n$$

(iv)［Ψ' の定義］$g' : \Delta[p] \times \underset{\sim}{Y} \times X \to \underset{\sim}{Z} \in \mathrm{hom}(\underset{\sim}{Y} \times X, \underset{\sim}{Z})_p$ とする。$\Psi'(g') : \Delta[p] \times \underset{\sim}{Y} \to \mathrm{hom}(X, \underset{\sim}{Z})$ を，$(\beta, y) \in (\Delta[p] \times \underset{\sim}{Y}^n)_q$，$(\gamma, x) \in (\Delta[q] \times X)_r$ に対して，次式により定義する。

$$\Psi'(g')(\beta, y)(\gamma, x) = g'(\bar{\beta}(\gamma), \bar{y}(\gamma), x) \in \underset{\sim}{Z}_r^n$$

このように定義される写像 Φ，Ψ，Φ'，Ψ' は，写像 $X' \to X \in \mathcal{S}$，$\underset{\sim}{Y}' \to \underset{\sim}{Y} \in c\mathcal{S}$，$\underset{\sim}{Z} \to \underset{\sim}{Z}' \in c\mathcal{S}$ に対して自然性をもつことが確かめられる。そして次の補題 3–1 が成り立つ。

補題 3–1[Goerss, Jardine[3] LEMMA Ⅱ.2.3 参照]　$X \in \mathcal{S}$，$\underset{\sim}{Y} \in c\mathcal{S}$，$\underset{\sim}{Z} \in c\mathcal{S}$ に対して，半単体複体の同型

$$\mathrm{hom}(X, \mathrm{hom}(\underset{\sim}{Y}, \underset{\sim}{Z})) \cong \mathrm{hom}(\underset{\sim}{Y} \times X, \underset{\sim}{Z}) \cong \mathrm{hom}(\underset{\sim}{Y}, \mathrm{hom}(X, \underset{\sim}{Z}))$$

が成り立つ。左側の同型は Φ と Ψ により与えられ，Φ と Ψ は互いに逆写像である。また，右側の同型は Φ' と Ψ' により与えられ，Φ' と Ψ' は互いに逆写像である。

第 4 節　対構成

半単体複体 X と単位要素をもつ可換環 $\boldsymbol{R}$ とから導出される余半単体複体 $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}X$ の定義と性質については参考文献 1)，2) を参照する。$\underset{\sim}{\Delta}$ を標準余半単体複体とし，写像複体 $\mathrm{hom}(\underset{\sim}{\Delta}, \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}X)$ を $\boldsymbol{R}_\infty X$ とも表す。このとき，$\boldsymbol{R}_\infty$ は圏 $\mathcal{S}$ からそれ自身への関手となる。標準的添加写像 $X \to \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}X$ は，恒等関手 Id から関手 $\boldsymbol{R}_\infty$ への自然変換

(4.01) $$\phi : Id \longrightarrow \boldsymbol{R}_\infty$$

を導く。

W, X, $Y \in \mathcal{S}$ とする。参考文献 1) P.28 および 2) 第 4 節 で定義された余半単体複体の間の余写像

(4.02) $$\tilde{c} : \mathrm{hom}(X, \underset{\sim}{R}Y) \times \mathrm{hom}(W, \underset{\sim}{R}X) \longrightarrow \mathrm{hom}(W, \underset{\sim}{R}Y)$$

を考える（参考文献では c で表されている）。余写像 $\tilde{c}$ から自然な方法で次の (4.03) の対応 $\bar{c}$ が構成される。

(4.03) $$\bar{c} : \mathrm{hom}(\underset{\sim}{\Delta}, \mathrm{hom}(X, \underset{\sim}{R}Y)) \times \mathrm{hom}(\underset{\sim}{\Delta}, \mathrm{hom}(W, \underset{\sim}{R}X)) \longrightarrow \mathrm{hom}(\underset{\sim}{\Delta}, \mathrm{hom}(W, \underset{\sim}{R}Y))$$

補題 3–1 により，(4.03) から次の (4.04)，(4.05) の 2 つの対応 $\hat{c}$，c が導かれる。

(4.04) $$\hat{c} : \mathrm{hom}(\underset{\sim}{\Delta} \times X, \underset{\sim}{R}Y) \times \mathrm{hom}(\underset{\sim}{\Delta} \times W, \underset{\sim}{R}X) \longrightarrow \mathrm{hom}(\underset{\sim}{\Delta} \times W, \underset{\sim}{R}Y)$$

(4.05) $$c : \mathrm{hom}(X, \mathrm{hom}(\underset{\sim}{\Delta}, \underset{\sim}{R}Y)) \times \mathrm{hom}(W, \mathrm{hom}(\underset{\sim}{\Delta}, \underset{\sim}{R}X)) \longrightarrow \mathrm{hom}(W, \mathrm{hom}(\underset{\sim}{\Delta}, \underset{\sim}{R}Y))$$

(4.05) は次の (4.06) の形にも表記される。

(4.06) $$c : \mathrm{hom}(X, \boldsymbol{R}_\infty Y) \times \mathrm{hom}(W, \boldsymbol{R}_\infty X) \longrightarrow \mathrm{hom}(W, \boldsymbol{R}_\infty Y))$$

$u \in \mathrm{hom}(X, \boldsymbol{R}_\infty Y)$，$v \in \mathrm{hom}(W, \boldsymbol{R}_\infty X)$ とし，$\hat{u} = \Phi(u)$，$\hat{v} = \Phi(v)$ とするとき，定義により次の (4.07) が成り立っている。

(4.07) $$c(u, v) = \Psi(\hat{c}(\hat{u}, \hat{v}))$$

以後本節では，c，$\hat{c}$，$\bar{c}$ を考えるとき，半単体複体の間の写像としての対応のうち 0 次元単体の集合の間の対応の部分のみに注目する。特に c については，任意の半単体写像 $f : X \to \boldsymbol{R}_\infty Y$，$g : W \to \boldsymbol{R}_\infty X$ に半単体写像 $c(f, g) : W \to \boldsymbol{R}_\infty Y$ を対応させる規則と考える。参考文献 1) P.28 あるいは 2) の補題 4–1 より，$\boldsymbol{R}_\infty, \phi, c$ は本資料第 2 節の性質 (i)，(ii)，(iii) を満たすことがわかる。

第 2 節 (2.08) に従い $id_{\boldsymbol{R}_\infty Y} : \boldsymbol{R}_\infty Y \to \boldsymbol{R}_\infty Y$ と $id_{\boldsymbol{R}^2_\infty Y} : \boldsymbol{R}^2_\infty Y \to \boldsymbol{R}^2_\infty Y$ から写像 $\psi_Y : \boldsymbol{R}^2_\infty Y \to \boldsymbol{R}_\infty Y$ を

(4.08) $$\psi_Y = c(id_{\boldsymbol{R}_\infty Y}, id_{\boldsymbol{R}^2_\infty Y})$$

として構成すると，$\boldsymbol{R}_\infty, \phi, c$ が第 2 節の性質 (i)，(ii)，(iii) を満たすことから，(4.08) により関手の自然変換 $\psi : \boldsymbol{R}^2_\infty \to \boldsymbol{R}_\infty$ が定義される。以上の条件のもとで次の補題 4–1 が成り立つ。

<u>補題 4–1</u>　$\{\boldsymbol{R}_\infty, \phi, \psi\}$ は圏 $\mathcal{S}$ における関手と自然変換の 3 つ組である。

補題 4–1 は，次の補助定理 4–2 と 補助定理 2–1 とから得られる。

<u>補助定理 4–2</u>　(1)　任意の $f : X \to \boldsymbol{R}_\infty Y$，恒等写像 $id_{\boldsymbol{R}_\infty X} : \boldsymbol{R}_\infty X \to \boldsymbol{R}_\infty X$ と $\psi_Y : \boldsymbol{R}^2_\infty Y \to \boldsymbol{R}_\infty Y$ に対して，$\boldsymbol{R}_\infty X$ から $\boldsymbol{R}_\infty Y$ への写像として，等式

(4.09) $$c(f, id_{\boldsymbol{R}_\infty X}) = \psi_Y \circ \boldsymbol{R}_\infty f$$

が成り立つ。

(2)　恒等写像 $id_{\boldsymbol{R}_\infty X} : \boldsymbol{R}_\infty X \to \boldsymbol{R}_\infty X$，任意の $g : W \to R^2_\infty X$ と $\psi_X : \boldsymbol{R}^2_\infty X \to \boldsymbol{R}_\infty X$ に

対して，W から $\boldsymbol{R}_\infty X$ への写像として，等式

$$c(id_{\boldsymbol{R}_\infty X}, g) = \psi_X \circ g \tag{4.10}$$

が成り立つ。

証明　(4.05) あるいは (4.06) における c を扱う代わり，(4.04) の $\hat{c}: \hom(\underset{\sim}{\Delta} \times X, \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}Y)_0 \times \hom(\underset{\sim}{\Delta} \times W, \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}X)_0 \to \hom(\underset{\sim}{\Delta} \times W, \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}Y)_0$ を考える方が，写像の記述が容易になるので，(4.07) に基づき $\hat{c}$ を扱うことにする。

$\hat{u}: \underset{\sim}{\Delta} \times X \to \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}Y$，$\hat{v}: \underset{\sim}{\Delta} \times W \to \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}X$ とするとき，$\hat{c}(\hat{u}, \hat{v}): \underset{\sim}{\Delta} \times W \to \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}Y$ の余次元 n における写像は，次の写像の列の合成である。

$$\begin{aligned}\Delta[n] \times W \xrightarrow{diagonal \times id} \Delta[n] \times \Delta[n] \times W \xrightarrow{id \times \hat{v}} \Delta[n] \times \boldsymbol{R}^{n+1}X \\ \cong \boldsymbol{R}^{n+1}(\Delta[q] \times X) \xrightarrow{\boldsymbol{R}^{n+1}\hat{u}} \boldsymbol{R}^{2(n+1)}Y \xrightarrow{w_{n+1}} \boldsymbol{R}^{n+1}Y\end{aligned}$$

この事実は $\tilde{c}$ の構成 4) 第 4 節 が $\bar{c}$ に反映し，Φ' あるいは Ψ' を通して $\hat{c}$ に導かれる。このことに従うと，$\hat{\psi}_Y = \hat{c}(\hat{id}_{\boldsymbol{R}_\infty}, \hat{id}_{\boldsymbol{R}^2_\infty Y})$ の余次元 n における写像は，次の写像の列の合成である。

$$\begin{aligned}\Delta[n] \times \boldsymbol{R}^2_\infty Y \xrightarrow{diagonal \times id} \Delta[n] \times \Delta[n] \times \boldsymbol{R}^2_\infty Y \xrightarrow{id \times \hat{id}_{\boldsymbol{R}^2_\infty Y}} \Delta[n] \times \boldsymbol{R}^{n+1}\boldsymbol{R}_\infty Y \\ \cong \boldsymbol{R}^{n+1}(\Delta[n] \times \boldsymbol{R}_\infty Y) \xrightarrow{\boldsymbol{R}^{n+1}\hat{id}_{\boldsymbol{R}_\infty Y}} \boldsymbol{R}^{2(n+1)}Y \xrightarrow{w_{n+1}} \boldsymbol{R}^{n+1}Y\end{aligned}$$

ここで，$\hat{id}_{\boldsymbol{R}^2_\infty Y} \in \hom(\underset{\sim}{\Delta} \times \boldsymbol{R}^2_\infty Y, \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}_\infty Y)$ は，$id_{\boldsymbol{R}^2_\infty X} \in \hom(\boldsymbol{R}^2_\infty X, \boldsymbol{R}^2_\infty X)$ の Φ による像 $\Phi(id_{\boldsymbol{R}^2_\infty X})$ を表す。$\hat{id}_{\boldsymbol{R}^2_\infty Y}$ は評価写像である。すなわち，

$$(\alpha, b) \in (\Delta[n] \times \boldsymbol{R}^2_\infty Y)_p = (\Delta[n] \times \hom(\underset{\sim}{\Delta}, \underset{\sim}{\boldsymbol{R}} \hom(\underset{\sim}{\Delta}, \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}Y))_p$$

に対して，

$$\hat{id}_{\boldsymbol{R}^2_\infty Y}(\alpha, b) = b(\iota_p, \alpha) \in \boldsymbol{R}^{n+1} \hom(\underset{\sim}{\Delta}, \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}Y)$$

となる。$\hat{id}_{\boldsymbol{R}_\infty Y} \in \hom(\underset{\sim}{\Delta} \times \boldsymbol{R}_\infty Y, \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}Y)$ についても同様である。すなわち，

$$(\alpha, b') \in (\Delta[n] \times \boldsymbol{R}_\infty Y)_p = (\Delta[n] \times \hom(\underset{\sim}{\Delta}, \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}Y))_p$$

に対して，

$$\hat{id}_{\boldsymbol{R}_\infty Y}(\alpha, b') = b'(\iota_p, \alpha) \in \boldsymbol{R}^{n+1}Y$$

である。

(1)　$\hat{c}(\hat{f}, \hat{id}_{\boldsymbol{R}_\infty X}): \underset{\sim}{\Delta} \times \hom(\underset{\sim}{\Delta}, \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}X) \longrightarrow \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}Y$ は，余次元 n において，次の写像の列の合成である。

$$\begin{aligned}\Delta[n] \times \hom(\underset{\sim}{\Delta}, \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}X) \xrightarrow{diagonal \times id} \Delta[n] \times \Delta[n] \times \hom(\underset{\sim}{\Delta}, \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}X) \xrightarrow{id \times \hat{id}_{\boldsymbol{R}_\infty X}} \\ \Delta[n] \times \boldsymbol{R}^{n+1}X \cong \boldsymbol{R}^{n+1}(\Delta[n] \times X) \xrightarrow{\boldsymbol{R}^{n+1}\hat{f}} \boldsymbol{R}^{2(n+1)}Y \xrightarrow{w_{n+1}} \boldsymbol{R}^{n+1}Y\end{aligned}$$

一方，$\widehat{\psi_Y \circ \boldsymbol{R}_\infty f}$ は次の写像の列である。

$$\begin{aligned}\Delta[n] \times \hom(\underset{\sim}{\Delta}, \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}X) \xrightarrow{id \times \hom(\underset{\sim}{\Delta}, \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}f)} \Delta[n] \times \hom(\underset{\sim}{\Delta}, \underset{\sim}{\boldsymbol{R}} \hom(\underset{\sim}{\Delta}, \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}Y)) \xrightarrow{diagonal \times id} \\ \Delta[n] \times \Delta[n] \times \hom(\underset{\sim}{\Delta}, \underset{\sim}{\boldsymbol{R}} \hom(\underset{\sim}{\Delta}, \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}Y)) \xrightarrow{id \times \hat{id}_{\boldsymbol{R}^2_\infty Y}} \Delta[n] \times \boldsymbol{R}^{n+1} \hom(\underset{\sim}{\Delta}, \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}Y) \\ \cong \boldsymbol{R}^{n+1}(\Delta[n] \times \hom(\underset{\sim}{\Delta}, \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}Y) \xrightarrow{\boldsymbol{R}^{n+1}\hat{id}_{\boldsymbol{R}_\infty Y}} \boldsymbol{R}^{2(n+1)}Y \xrightarrow{w_{n+1}} \boldsymbol{R}^{n+1}Y\end{aligned}$$

上記の 2 つの写像の列をそれぞれ詳細に調べると，

$$\hat{c}(\hat{f}, \hat{id}_{\boldsymbol{R}_\infty X}) = \widehat{\psi_Y \circ \boldsymbol{R}_\infty f}$$

が成り立っていることがわかる。したがって (4.09) が成り立つ。

(2)　$\hat{c}(\hat{id}_{\boldsymbol{R}_\infty X}, \hat{g}) : \underset{\sim}{\Delta} \times W \longrightarrow \underset{\sim}{R}X$ は，余次元 n において，次の写像の列の合成である。

$$\begin{aligned} \Delta[n] \times W &\xrightarrow{diagonal \times id} \Delta[n] \times \Delta[n] \times W \xrightarrow{id \times \hat{g}} \Delta[n] \times \boldsymbol{R}^{n+1} \hom(\underset{\sim}{\Delta}, \underset{\sim}{R}X) \\ &\cong \boldsymbol{R}^{n+1}(\Delta[n] \times \hom(\underset{\sim}{\Delta}, \underset{\sim}{R}X)) \xrightarrow{\boldsymbol{R}^{n+1}\hat{id}_{\boldsymbol{R}_\infty}} \boldsymbol{R}^{2(n+1)}X \xrightarrow{w_{n+1}} \boldsymbol{R}^{n+1}X \end{aligned}$$

一方，$\widehat{\psi_X \circ g}$ は次の写像の列の合成である。

$$\begin{aligned} &\Delta[n] \times W \xrightarrow{id \times g} \Delta[n] \times \hom(\underset{\sim}{\Delta}, \underset{\sim}{R} \hom(\underset{\sim}{\Delta}, \underset{\sim}{R}X)) \xrightarrow{diagonal \times id} \\ &\Delta[n] \times \Delta[n] \times \hom(\underset{\sim}{\Delta}, \underset{\sim}{R} \hom(\underset{\sim}{\Delta}, \underset{\sim}{R}X)) \xrightarrow{id \times \hat{id}_{\boldsymbol{R}^2_\infty X}} \Delta[n] \times \boldsymbol{R}^{n+1} \hom(\underset{\sim}{\Delta}, \underset{\sim}{R}X) \\ &\cong \boldsymbol{R}^{n+1}(\Delta[n] \times \hom(\underset{\sim}{\Delta}, \underset{\sim}{R}X) \xrightarrow{\boldsymbol{R}^{n+1}\hat{id}_{\boldsymbol{R}_\infty X}} \boldsymbol{R}^{2(n+1)}X \xrightarrow{w_{n+1}} \boldsymbol{R}^{n+1}X \end{aligned}$$

ここでも上記の 2 つの写像の列を詳細に調べると，

$$\hat{c}(\hat{id}_{\boldsymbol{R}_\infty X}, \hat{g}) = \widehat{\psi_X \circ g}$$

が成り立っていることがわかる。したがって (4.10) が成り立つ。　　　　**証明終わり**

おわりに

本資料の内容は，参考文献 2) の資料の内容に続くものである。2) の作成に取りかかった当初は，まとめて一編の資料として掲載する予定であった。しかし，本資料第 4 節補助定理 4–2 の証明を完結するのに時間を要し，2 つに分割して掲載させていただくこととした。

参考文献

1) A.K. Bousfield, D.M. Kan, “Homotopy Limits, Completions and Localizations”, LNM 304, Springer-Verlag (1972)

2) 又賀　喜治，“<資料>余半単体複体 $\underset{\sim}{R}X$ について”，流通科学大学論集－人間・社会・自然編－第 23 巻第 1 号 P.169–176（2010 年 7 月）

3) P.G. Goerss, J.F. Jardine, “Simplicial Homotopy Theory”, Birkhäuser Verlag (1999)

4) J.P. May, “Simplicial Objects in Algebraic Topology”, D.Van Nostrand Company, Inc. (1967)