流通科学大学論集—人間・社会・自然編—第22巻第1号，95-102（2009）

＜研究ノート＞

同一の面をもつ２つの単体の差について

On the Difference of Two Simplices with the Same Faces

又賀　喜治*
Yoshiharu Mataga

Ⅰ．目的

本研究ノートの目的は，次のページに記す補題１の証明を書き出すことである。補題１の結果は，Bousfield and Kan[1] の Ch.I–4.8 Nilpotent fibration lemma（巾零ファイバー空間の Postnikov 分解の細分化に関する補助定理）において，証明に言及することなく引用されている。その証明は Bousfield and Kan[1] の著者の他にも多くの人々により知られているのは確かであるが，筆者は参照する文献には見いだせないでいる。そのため，補題１の証明を試みた。証明は標準的方法によるものである。そのような内容の事柄を記述しているため，研究ノートという分類で掲載させていただく。なお，表題の文言「同一の面をもつ２つの単体の差」は補題１の本質をなす考えである。

話題は位相幾何学の半単体複体の圏におけるものである。非負の整数 n により次数づけられた集合 X_n $(n=0,1,\cdots)$ の列に，面作用素と呼ばれる写像 $\partial_i : X_n \to X_{n-1}$ と退化作用素と呼ばれる写像 $s_i : X_n \to X_{n+1}$ $(0 \leqq i \leqq n)$ が備わっており，それらが次の等式群を満たすとき，$X=(X_n, \partial_i, s_i)$ を半単体複体という。X_n の元は n-単体と呼ばれ，特に 0-単体は頂点とも呼ばれる。

$$
\begin{array}{rcll}
\partial_i\partial_j & = & \partial_{j-1}\partial_i & (i<j) \\
s_i s_j & = & s_{j+1}s_i & (i \leqq j) \\
\partial_i s_j & = & s_{j-1}\partial_i & (i<j) \\
 & = & id \ \text{（恒等写像）} & (i=j,j+1) \\
 & = & s_j\partial_{i-1} & (i>j+1)
\end{array}
$$

半単体複体に関する各種用語とそれらの定義は May[2] に従い，用語の日本語訳については可能な限り数学事典[3] にならった（巻末注記参照）。

E，B を連結な Kan 複体とし，$p:(E,\psi) \to (B,\phi)$ は連結なファイバーをもつ極小な Kan ファイバー空間とする。ここで，ψ，ϕ はそれぞれ E，B の基点である。$F_\phi = p^{-1}(\phi)$ を ϕ の上のファイバーとする。n を正の整数とする。$\mathfrak{g}$ を F_ϕ の n 次元ホモトピー群 $\pi_n(F_\phi,\psi)$ の部分群

* 流通科学大学商学部、〒651-2188　神戸市西区学園西町 3-1

（2009年4月10日受理）

とし，$\mathfrak{g}$ は E の基本群 $\pi_1(E,\psi)$ の作用で閉じているとする。$\Delta[q]$ を q 次元標準半単体複体とし，$\Delta[q]^{n-1}$ を $\Delta[q]$ の $n-1$ 切片とする。E の q-単体 x により定義される標準的単体写像を $\bar{x}:\Delta[q]\to E$ と表す。このとき，E の 2 つの q-単体 x，y の間に次の (1.1)，(1.2) の関係が成り立ち，(1.1)，(1.2) を前提条件としてその上に (1.5) の関係が成り立つとき $x \overset{(n,\mathfrak{g})}{\sim} y$ と表す。

(1.1)　$p(x)=p(y)$ である。

(1.2)　標準的単体写像 $\bar{x}$，$\bar{y}:\Delta[q]\to E$ について，$\bar{x}|_{\Delta[q]^{n-1}}=\bar{y}|_{\Delta[q]^{n-1}}$ が成り立つ。

α を $\Delta[q]$ の任意の n-単体とし，E の n-単体 $\bar{x}(\alpha)$，$\bar{y}(\alpha)$ をそれぞれ $x|_\alpha$，$y|_\alpha$ と表す。このとき，(1.2) により，$x|_\alpha$ と $y|_\alpha$ は同じ $n-1$ 面をもつ n-単体である。E の頂点 $\partial_0\cdots\partial_{n-1}x|_\alpha$ を ψ_α とおき，B の頂点 ϕ_α を $\phi_\alpha=p(\psi_\alpha)$ とする。p は極小な Kan ファイバー空間であるから ψ_α は，ϕ_α の上のファイバー F_{ϕ_α} の唯一の頂点である。第 2 節で $x|_\alpha$ と $y|_\alpha$ との差と呼ばれる，次の (1.3)，(1.4) の性質をもつ n-単体 $x|_\alpha\ominus y|_\alpha$ を構成する。

(1.3)　$$\partial_i(x|_\alpha\ominus y|_\alpha)=s_{n-2}\cdots s_0\psi_\alpha=s_0^{n-1}\psi_\alpha \qquad (0\leqq i\leqq n)$$

(1.4)　$$x|_\alpha\ominus y|_\alpha\in(F_{\phi_\alpha})_n$$

(1.3)，(1.4) の性質により，$x|_\alpha\ominus y|_\alpha$ は $\pi_n(F_{\phi_\alpha},\psi_\alpha)$ の元 $[\,x|_\alpha\ominus y|_\alpha\,]$ を定義することがわかる。F_ϕ の頂点 ψ と F_{ϕ_α} の頂点 ψ_α を結ぶ 1-単体 $l_{\psi\psi_\alpha}$ から誘導される同型写像 $l^{\#}_{\psi\psi_\alpha}:\pi_n(F_\phi,\psi)\cong\pi_n(F_{\phi_\alpha},\psi_\alpha)$ を介して，$[\,x|_\alpha\ominus y|_\alpha\,]$ は $\pi_n(F_\phi,\psi)$ のある元に対応する。このとき，(1.1)，(1.2) を前提とする条件 (1.5) は次の通りである。

(1.5)　同型写像 $l^{\#}_{\psi\psi_\alpha}$ により $[\,x|_\alpha\ominus y|_\alpha\,]$ は $\mathfrak{g}$ に含まれる元に対応する。

以上の説明のもとで次の補題 1 が成り立つ。

補題 1　関係 $\overset{(n,\mathfrak{g})}{\sim}$ は，E の q-単体の集合 E_q の上で同値関係である。 □

E_q の上に同値関係を構成する条件として問題となるのは (1.5) である。(1.5) が (1.1)，(1.2) と合わさり，同値関係を定義する条件であるためには次の (1.6)，(1.7)，(1.8) を示す必要がある。これらのうち，(1.7) は関係 $x \overset{(n,\mathfrak{g})}{\sim} y$ の推移性を示すために必要となる事柄である。

(1.6)　差 $x|_\alpha\ominus y|_\alpha$ が (1.3)，(1.4) を満たす E の n-単体として確定的に定義される。

(1.7)　x，y，z が (1.1)，(1.2) の条件を満たす q-単体であるとき，すなわち，$p(x)=p(y)=p(z)$，$\bar{x}|_{\Delta[q]^{n-1}}=\bar{y}|_{\Delta[q]^{n-1}}=\bar{z}|_{\Delta[q]^{n-1}}$ であるならば，$\pi_n(F_{\phi_\alpha},\psi_\alpha)$ において，

$$[\,x|_\alpha\ominus y|_\alpha\,]+[\,y|_\alpha\ominus z|_\alpha\,]=[\,x|_\alpha\ominus z|_\alpha\,]$$

が成り立つ。

(1.8)　元 $[\,x|_\alpha\ominus y|_\alpha\,]\in\pi_n(F_{\phi_\alpha},\psi_\alpha)$ が，同型写像 $l^{\#}_{\psi\psi_\alpha}:\pi_n(F_\phi,\psi)\to\pi_n(F_{\phi_\alpha},\psi_\alpha)$ により $\pi_n(F_\phi,\psi)$ のある元に対応するとき，対応する元が $\mathfrak{g}$ に含まれるかどうかは，$\psi\in F_\phi$ と $\psi_\alpha\in F_{\phi_\alpha}$ を結ぶ 1-単体によらず決まる。

以下のII，IIIでは，(1.6)，(1.7)，(1.8) について調べ，補題 1 が成り立つことを確認する。

Ⅱ．同一の面をもつ２つの単体の差

1. $p:(E,\psi)\to(B,\phi)$ を Kan ファイバー空間とする。E の $(n+1)$ 個の n-単体 x_0，$\cdots$，x_{k-1}，x_{k+1}，$\cdots$，x_{n+1} と B の $(n+1)$-単体 b に対して，$\partial_i x_j=\partial_{j-1}x_i$ $(i<j, i\neq k, j\neq k)$，$p(x_i)=\partial_i b$ $(i\neq k)$ が成り立つとき，Kan ファイバー空間の性質により，$(n+1)$-単体 u を $p(u)=b$，$\partial_i u=x_i$ $(i\neq k)$ を満たすものとして選ぶことができる。この事実を，

$$(\partial\,;p)u=(x_0,\cdots,x_{k-1},\ \cdot\ ,x_{k+1},\cdots,x_{n+1}\,;b) \tag{2.1}$$

と表すことにする。

以下本節を通して E，B は連結な Kan 複体で，$p:(E,\psi)\to(B,\phi)$ は連結なファイバーをもつ極小な Kan ファイバー空間とする。ただし，B は必ずしも極小とは仮定しない。このとき，極小な Kan ファイバー空間の性質により，(2.1) においては $(n+1)$-単体 u の選び方によらず，$\cdot$ の記入されているところに入るべき u の第 k 面 $\partial_k u$ は一意に定まる。

n $(\geqq 1)$ を整数とする。x，y を E の n-単体とし，$p(x)=p(y)$，$\partial_i x=\partial_i y$ $(0\leqq i\leqq n)$ を満たすとする。E の頂点 $\partial_0\cdots\partial_{n-1}x=\partial_0\cdots\partial_{n-1}y$ を ψ_x と表し，$\phi_x=p(\psi_x)\in B_0$ とおく。ϕ_x の上のファイバーを F_{ϕ_x} と表すと，ψ_x は F_{ϕ_x} のただ１つの頂点である。このとき，x と y に対しそれらの差と呼ぶ n 単体 $x\ominus y\in F_{\phi_x}$ を，ある定まった手続きにより，

$$\partial_i(x\ominus y)=s_0^{n-1}\psi_x \qquad (0\leqq i\leqq n)$$

を満たすように構成する。その結果，$x\ominus y$ を代表とする $\pi_n(F_{\phi_x},\psi_x)$ の元 $[x\ominus y]$ が定まる。

2. E の 1-単体 x，y は $p(x)=p(y)$，$\partial_i x=\partial_i y$ $(i=0,1)$ を満たすとする。E の 2-単体 u_{xy} を

$$(\partial\,;p)u_{xy}=(\ \cdot\ ,x,y\,;s_1p(x))$$

を満たすものとして選び，1-単体 a_{xy} を

$$a_{xy}=\partial_0 u_{xy}$$

とする。a_{xy} は x，y により一意に決まる。

定義Ⅱ-1 a_{xy} を x と y の差と定義し，$x\ominus y$ と表す。 □

$\partial_0 a_{xy}=\partial_1 a_{xy}=\psi_x$，$p(a_{xy})=s_0\phi_x$ であることは容易にわかる。したがって，$x\ominus y$ は F_{ϕ_x} の 1-単体で，$\pi_1(F_{\phi_x},\psi_x)$ の元 $[x\ominus y]$ を定める。特に，$x=y$ である場合，u_{xy} として s_1x を選ぶことができる。このとき，$a_{xy}=\partial_0 u_{xy}=\partial_0 s_1 x=s_0\partial_0 x=s_0\psi_x$ であるから，

$$[x\ominus y]=0\in\pi_1(F_{\phi_x},\psi_x) \tag{2.2}$$

である。ここで，$\pi_1(F_{\phi_x},\psi_x)$ の単位元を 0 で表した。

3. $n\geqq 2$ とする。x，y を E の n-単体とし，$p(x)=p(y)$，$\partial_i x=\partial_i y$ $(0\leqq i\leqq n)$ を満たすとする。E の $(n+1)$-単体 $u_{xy}^{(1)}$ を

$$(\partial\,;p)u_{xy}^{(1)}=(s_{n-1}\partial_0 x,\cdots,s_{n-1}\partial_{n-2}x,\ \cdot\ ,x,y\,;s_np(x))$$

を満たすように選び，$u_{xy}^{(1)}$ の第 $n-1$ 面 $\partial_{n-1}u_{xy}^{(1)}$ を $a_{xy}^{(1)}$ とおく。すなわち，

$$a_{xy}^{(1)}=\partial_{n-1}u_{xy}^{(1)}$$

とする。$p(a_{xy}^{(1)})$ と $a_{xy}^{(1)}$ の各面は，計算により，

$$
\begin{aligned}
p(a_{xy}^{(1)}) &= p(\partial_{n-1}u_{xy}^{(1)}) = \partial_{n-1}p(u_{xy}^{(1)}) = \partial_{n-1}s_n p(x) = s_{n-1}\partial_{n-1}p(x), \\
\partial_i a_{xy}^{(1)} &= \partial_i\partial_{n-1}u_{xy}^{(1)} = \partial_{n-2}\partial_i u_{xy}^{(1)} = \partial_{n-2}s_{n-1}\partial_i x = s_{n-2}\partial_i\partial_{n-1}x \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (0 \leqq i \leqq n-2), \\
\partial_i a_{xy}^{(1)} &= \partial_{n-1}x \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i = n-1, n)
\end{aligned}
$$

である。次に，$a_{xy}^{(1)}$ を用いて $(n+1)$-単体 $u_{xy}^{(2)}$ を

$$
\begin{aligned}
(\partial\,;p)u_{xy}^{(2)} = (&s_{n-1}s_{n-2}\partial_0\partial_{n-1}x, \cdots, s_{n-1}s_{n-2}\partial_i\partial_{n-1}x, \\
&\cdots, s_{n-1}s_{n-2}\partial_{n-3}\partial_{n-1}x, \cdot, a_{xy}^{(1)}, s_{n-1}\partial_{n-1}x, s_{n-1}\partial_{n-1}x\,; s_{n-1}p(a_{xy}^{(1)}))
\end{aligned}
$$

を満たすように選び，$u_{xy}^{(2)}$ の第 $n-2$ 面 $\partial_{n-2}u_{xy}^{(2)}$ を $a_{xy}^{(2)}$ とおく。$p(a_{xy}^{(2)})$ と $a_{xy}^{(2)}$ の各面は，

$$
\begin{aligned}
p(a_{xy}^{(2)}) &= p(\partial_{n-2}u_{xy}^{(2)}) = \partial_{n-2}p(u_{xy}^{(2)}) = \partial_{n-2}s_{n-1}p(a_{xy}^{(1)}) \\
&= s_{n-1}s_{n-2}\partial_{n-2}\partial_{n-1}p(x), \\
\partial_i a_{xy}^{(2)} &= \partial_i\partial_{n-2}u_{xy}^{(2)} = \partial_{n-3}\partial_i u_{xy}^{(2)} = \partial_{n-3}s_{n-1}s_{n-2}\partial_i\partial_{n-1}x \\
&= s_{n-2}s_{n-3}\partial_i\partial_{n-2}\partial_{n-1}x \qquad\qquad (0 \leqq i \leqq n-3), \\
\partial_{n-2}a_{xy}^{(2)} &= \partial_{n-2}\partial_{n-2}u_{xy}^{(2)} = \partial_{n-2}\partial_{n-1}u_{xy}^{(2)} = \partial_{n-2}a_{xy}^{(1)} \\
&= s_{n-2}\partial_{n-2}\partial_{n-1}x, \\
\partial_i a_{xy}^{(2)} &= \partial_i\partial_{n-2}u_{xy}^{(2)} = \partial_{n-2}\partial_{i+1}u_{xy}^{(2)} = \partial_{n-2}s_{n-1}\partial_{n-1}x \\
&= s_{n-2}\partial_{n-2}\partial_{n-1}x \qquad\qquad (i = n-1, n)
\end{aligned}
$$

となる。以下帰納的に $u_{xy}^{(3)}$，$a_{xy}^{(3)}$，$\cdots$，$u_{xy}^{(n)}$，$a_{xy}^{(n)}$ を構成する。$1 \leqq r \leqq n-2$ とし，n-単体 $a_{xy}^{(n-r)}$ が

$$
\begin{aligned}
p(a_{xy}^{(n-r)}) &= s_{n-1}\cdots s_r\partial_r\cdots\partial_{n-1}p(x), \\
\partial_i a_{xy}^{(n-r)} &= s_{n-2}\cdots s_{r-1}\partial_i\partial_r\cdots\partial_{n-1}x \qquad (0 \leqq i \leqq r-1), \\
\partial_i a_{xy}^{(n-r)} &= s_{n-2}\cdots s_r\partial_r\cdots\partial_{n-1}x \qquad (r \leqq i \leqq n)
\end{aligned}
$$

を満たすように構成されたとする。$(n+1)$-単体 $u_{xy}^{(n-r+1)}$ を，

$$
\begin{aligned}
(\partial\,;p)u_{xy}^{(n-r+1)} = (&s_{n-1}\cdots s_{r-1}\partial_0\partial_r\cdots\partial_{n-1}x, \cdots, s_{n-1}\cdots s_{r-1}\partial_i\partial_r\cdots\partial_{n-1}x, \cdots, \\
&s_{n-1}\cdots s_{r-1}\partial_{r-2}\partial_r\cdots\partial_{n-1}x, \cdot, a_{xy}^{(n-r)}, \\
&s_{n-1}\cdots s_r\partial_r\cdots\partial_{n-1}x, \cdots, s_{n-1}\cdots s_r\partial_r\cdots\partial_{n-1}x\,; s_r p(a_{xy}^{(n-r)})
\end{aligned}
$$

を満たすように選ぶ。$u_{xy}^{(n-r+1)}$ の第 $r-1$ 面 $\partial_{r-1}u_{xy}^{(n-r+1)}$ を $a_{xy}^{(n-r+1)}$ とおく。
$p(a_{xy}^{(n-r+1)})$ と $a_{xy}^{(n-r+1)}$ の各面は，

$$
\begin{aligned}
p(a_{xy}^{(n-r+1)}) &= s_{n-1}\cdots s_{r-1}\partial_{r-1}\cdots\partial_{n-1}p(x), \\
\partial_i a_{xy}^{(n-r+1)} &= s_{n-2}\cdots s_{r-2}\partial_i\partial_{r-1}\cdots\partial_{n-1}x \qquad (0 \leqq i \leqq r-2), \\
\partial_i a_{xy}^{(n-r+1)} &= s_{n-2}\cdots s_{r-1}\partial_{r-1}\partial_r\cdots\partial_{n-1}x \qquad (r-1 \leqq i \leqq n)
\end{aligned}
$$

である。

$r=1$ の場合の $a_{xy}^{(n-r+1)} = a_{xy}^{(n)}$ について，$p(a_{xy}^{(n)})$ とその各面は，

$$\begin{aligned} p(a_{xy}^{(n)}) &= s_{n-1}\cdots s_0\partial_0\cdots\partial_{n-1}p(x) = s_0^n\phi_x, \\ \partial_i a_{xy}^{(n)} &= s_{n-2}\cdots s_0\partial_0\partial_1\cdots\partial_{n-1}x = s_0^{n-1}\psi_x \quad (0 \leqq i \leqq n) \end{aligned}$$

である。したがって，$a_{xy}^{(n)}$ は F_{ϕ_x} の n-単体であり，$\pi_n(F_{\phi_x}, \psi_x)$ の元を代表する。

定義Ⅱ-2　$a_{xy}^{(n)}$ を x と y の差と定義し，$x \ominus y$ と表す。 □

$x=y$ ならば，$a_{xy}^{(1)}$ から $a_{xy}^{(n)}$ に至る構成をたどることにより，

$$x \ominus y = a_{xy}^{(n)} = s_{n-1}\cdots s_0\partial_0\cdots\partial_{n-1}x = s_0^n\psi_x$$

であることがわかり，次の (2.3) が成り立つ。

$$[x \ominus y] = 0 \in \pi_n(F_{\phi_x}, \psi_x) \tag{2.3}$$

Ⅲ．推移性

1.　Ⅱで用いた記号を引き継ぎ (1.7) について述べる。E の n-単体 x，y，z が $p(x)=p(y)=p(z)$，$\partial_i x = \partial_i y = \partial_i z$ $(0 \leqq i \leqq n)$ を満たすとき，**Ⅱ．2**，**Ⅱ．3** で構成された $x \ominus y$ と全く同様に構成される $y \ominus z$，$x \ominus z$ に対し，$\pi_n(F_{\phi_x}, \psi_x)$ において，

$$[x \ominus y] + [y \ominus z] = [x \ominus z] \tag{3.1}$$

が成り立つことを示す。

2.　**Ⅱ．2** で用いた記号を引き継ぎ，$n=1$ の場合を扱う。E の 1-単体 x，y，z に対して，2-単体 u_{xy}，u_{yz}，u_{xz} をそれぞれ $(\partial;p)u_{xy} = (\,\cdot\,, x, y\,; s_1p(x))$，$(\partial;p)u_{yz} = (\,\cdot\,, y, z\,; s_1p(y))$，$(\partial;p)u_{xz} = (\,\cdot\,, x, z\,; s_1p(x))$ を満たすように選び，3-単体 v を

$$(\partial;p)v = (\,\cdot\,, u_{xy}, u_{xz}, u_{yz}\,; s_2s_1p(x))$$

満たすように選ぶ。このとき，$\partial_0 v$ について，

$$\begin{aligned} &p(\partial_0 v) = \partial_0 p(v) = \partial_0 s_2 s_1 p(x) = s_1 s_0 \partial_0 p(x) = s_1 s_0 \phi_x = s_0^2 \phi_x \\ &\partial_0\partial_0 v = \partial_0\partial_1 v = \partial_0 u_{xy} = a_{xy} = x \ominus y, \\ &\partial_1\partial_0 v = \partial_0\partial_2 v = \partial_0 u_{xz} = a_{xz} = x \ominus z, \\ &\partial_2\partial_0 v = \partial_0\partial_3 v = \partial_0 u_{yz} = a_{yz} = y \ominus z \end{aligned}$$

である。したがって，$\pi_1(F_{\phi_x}, \psi_x)$ において，

$$[x \ominus y] + [y \ominus z] = [x \ominus z] \tag{3.2}$$

が成り立つ。

3.　**Ⅱ．3** で用いた記号を引き継ぎ，$n \geqq 2$ の場合を扱う。x，y から $u_{xy}^{(n-r)}$ および $a_{xy}^{(n-r)}$ $(0 \leqq r \leqq n-1)$ を構成したのと全く同様に，$(n+1)$-単体 $u_{xz}^{(n-r)}$，$u_{yz}^{(n-r)}$ と n-単体 $a_{xz}^{(n-r)}$，$a_{yz}^{(n-r)}$ $(0 \leqq r \leqq n-1)$ を構成しておく。

$(n+2)$-単体 $v^{(1)}$ を，

$$(\partial;p)v^{(1)} = (s_n s_{n-1}\partial_0 x, \cdots, s_n s_{n-1}\partial_{n-2}x,\ \cdot\,, u_{xy}^{(1)}, u_{xz}^{(1)}, u_{yz}^{(1)}\,; s_{n+1}s_n p(x))$$

を満たすように選び，$v^{(1)}$ の第 $n-1$ 面 $\partial_{n-1}v^{(1)}$ を $\tilde{u}^{(1)}$ とおく。このとき，$p(\tilde{u}^{(1)})$ と $\tilde{u}^{(1)}$ の各面はそれぞれ，

$$\begin{aligned}
p(\tilde{u}^{(1)}) &= p(\partial_{n-1}v^{(1)}) = \partial_{n-1}p(v^{(1)}) = s_n s_{n-1}\partial_{n-1}p(x),\\
\partial_i\tilde{u}^{(1)} &= \partial_i\partial_{n-1}v^{(1)} = \partial_{n-2}\partial_i v^{(1)} = \partial_{n-2}s_n s_{n-1}\partial_i x\\
&= s_{n-1}s_{n-2}\partial_i\partial_{n-1}x \qquad (0 \leqq i \leqq n-2),\\
\partial_{n-1}\tilde{u}^{(1)} &= \partial_{n-1}\partial_{n-1}v^{(1)} = \partial_{n-1}\partial_n v^{(1)} = \partial_{n-1}u^{(1)}_{xy} = a^{(1)}_{xy},\\
\partial_n\tilde{u}^{(1)} &= \partial_n\partial_{n-1}v^{(1)} = \partial_{n-1}\partial_{n+1}v^{(1)} = \partial_{n-1}u^{(1)}_{xz} = a^{(1)}_{xz},\\
\partial_{n+1}\tilde{u}^{(1)} &= \partial_{n+1}\partial_{n-1}v^{(1)} = \partial_{n-1}\partial_{n+2}v^{(1)} = \partial_{n-1}u^{(1)}_{yz} = a^{(1)}_{yz}
\end{aligned}$$

となる。さて，$(n+1)$-単体 $\tilde{u}^{(n-r)}$ が，

$$\begin{aligned}
p(\tilde{u}^{(n-r)}) &= s_n\cdots s_r\partial_r\cdots\partial_{n-1}p(x),\\
\partial_i\tilde{u}^{(n-r)} &= s_{n-1}\cdots s_{r-1}\partial_i\partial_r\cdots\partial_{n-1}x \quad (0 \leqq i \leqq r-1),\\
\partial_i\tilde{u}^{(n-r)} &= s_{n-1}\cdots s_r\partial_r\cdots\partial_{n-1}x \qquad (r \leqq i \leqq n-2),\\
\partial_{n-1}\tilde{u}^{(n-r)} &= a^{(n-r)}_{xy},\\
\partial_n\tilde{u}^{(n-r)} &= a^{(n-r)}_{xz},\\
\partial_{n+1}\tilde{u}^{(n-r)} &= a^{(n-r)}_{yz}
\end{aligned}$$

を満たすように構成されたとする。次の段階を記述するため，B の $(n+2)$-単体 $d^{(n-r)}$ と E の $(n+1)$-単体 c_i $(0 \leqq i \leqq r-2,\ \ r+1 \leqq i \leqq n-1)$ をそれぞれ，

$$\begin{aligned}
d^{(n-r)} &= s_{n+1}s_n\cdots s_r\partial_r\cdots\partial_{n-1}p(x)\ ,\\
c_i &= s_n\cdots s_{r-1}\partial_i\partial_r\cdots\partial_{n-1}x \qquad (0 \leqq i \leqq r-2),\\
c_i &= s_n\cdots s_r\partial_r\cdots\partial_{n-1}x \qquad (r+1 \leqq i \leqq n-1)
\end{aligned}$$

とする。$(n+2)$-単体 $v^{(n-r+1)}$ を

$$\begin{aligned}
(\partial\,;p)v^{(n-r+1)} = (&c_0,\cdots,c_{r-2},\ \cdot\ ,\tilde{u}^{(n-r)},c_{r+1},\cdots,c_{n-1},\\
&u^{(n-r+1)}_{xy},u^{(n-r+1)}_{xz},u^{(n-r+1)}_{yz}\,;d^{(n-r)})
\end{aligned}$$

を満たすように選ぶ。$(n+1)$-単体 $\tilde{u}^{(n-r+1)}$ を $\tilde{u}^{(n-r+1)} = \partial_{r-1}v^{(n-r+1)}$ とおく。
$p(\tilde{u}^{(n-r+1)})$ と $\tilde{u}^{(n-r+1)}$ の各面を書き出すと次の通りとなる。

$$\begin{aligned}
p(\tilde{u}^{(n-r+1)}) &= p(\partial_{r-1}v^{(n-r+1)}) = \partial_{r-1}s_{n+1}\cdots s_r\partial_r\cdots\partial_{n-1}p(x)\\
&= s_n\cdots s_{r-1}\partial_{r-1}\cdots\partial_{n-1}p(x),\\
\partial_i\tilde{u}^{(n-r+1)} &= \partial_i\partial_{r-1}v^{(n-r+1)} = \partial_{r-2}\partial_i v^{(n-r+1)} = \partial_{r-2}s_n\cdots s_{r-1}\partial_i\partial_r\cdots\partial_{n-1}x\\
&= s_{n-1}\cdots s_{r-2}\partial_i\partial_{r-1}\partial_r\cdots\partial_{n-1}x \qquad (0 \leqq i \leqq r-2),\\
\partial_{r-1}\tilde{u}^{(n-r+1)} &= \partial_{r-1}\partial_{r-1}v^{(n-r+1)} = \partial_{r-1}\partial_r v^{(n-r+1)} = \partial_{r-1}\tilde{u}^{(n-r)}\\
&= s_{n-1}\cdots s_{r-1}\partial_{r-1}\cdots\partial_{n-1}x,\\
\partial_i\tilde{u}^{(n-r+1)} &= \partial_i\partial_{r-1}v^{(n-r+1)} = \partial_{r-1}\partial_{i+1}v^{(n-r+1)} = \partial_{r-1}s_n\cdots s_r\partial_r\cdots\partial_{n-1}x
\end{aligned}$$

$$= s_{n-1}\cdots s_{r-1}\partial_{r-1}\cdots\partial_{n-1}x \qquad (r \leqq i \leqq n-2),$$

$$\partial_{n-1}\tilde{u}^{(n-r+1)} = \partial_{n-1}\partial_{r-1}v^{(n-r+1)} = \partial_{r-1}\partial_n v^{(n-r+1)} = \partial_{r-1}u_{xy}^{(n-r+1)} = a_{xy}^{(n-r+1)},$$

$$\partial_n\tilde{u}^{(n-r+1)} = \partial_n\partial_{r-1}v^{(n-r+1)} = \partial_{r-1}\partial_{n+1}v^{(n-r+1)} = \partial_{r-1}u_{xz}^{(n-r+1)} = a_{xz}^{(n-r+1)},$$

$$\partial_{n+1}\tilde{u}^{(n-r+1)} = \partial_{n+1}\partial_{r-1}v^{(n-r+1)} = \partial_{r-1}\partial_{n+2}v^{(n-r+1)} = \partial_{r-1}u_{yz}^{(n-r+1)} = a_{yz}^{(n-r+1)}$$

ここで，$r=1$ の場合 $\tilde{u}^{(n-r+1)} = \tilde{u}^{(n)}$ となり，$p(\tilde{u}^{(n)})$ と $\tilde{u}^{(n)}$ の面は，

$$p(\tilde{u}^{(n)}) = s_n\cdots s_0\partial_0\cdots\partial_{n-1}p(x) = s_0^{n+1}\phi_x,$$

$$\partial_i\tilde{u}^{(n)} = s_{n-1}\cdots s_0\partial_0\cdots\partial_{n-1}x = s_0^n\psi_x \qquad (0 \leqq i \leqq n-2),$$

$$\partial_{n-1}\tilde{u}^{(n)} = a_{xy}^{(n)} = x \ominus y,$$

$$\partial_n\tilde{u}^{(n)} = a_{xz}^{(n)} = x \ominus z,$$

$$\partial_{n+1}\tilde{u}^{(n)} = a_{zy}^{(n)} = y \ominus z$$

である。したがって，$\pi_n(F_{\phi_x}, \psi_x)$ において次の (3.3) が成り立つ。

(3.3)
$$[\,x \ominus y\,] + [\,y \ominus z\,] = [\,x \ominus z\,]$$

(3.2)，(3.3) により (3.1) は示された。

Ⅳ．まとめ

Ⅰで用いた記号を引き継ぎ，補題 1 の証明を，Ⅱ，Ⅲの結果を利用してまとめる。

先ず (1.8) に関して述べる。$l_{\psi\psi_\alpha}$ を ψ と ψ_α を結ぶ E の 1-単体，ω を $\pi_n(F_\phi, \psi)$ の元を代表する F_ϕ の n-単体とする。したがって，$\partial_i\omega = s_0^{n-1}\psi$ $(0 \leqq i \leqq n)$ である。単体写像

$$h : \Delta[n] \times \{0\} \cup \Delta[n]^{n-1} \times \Delta[1] \longrightarrow E$$

を，$h|_{\Delta[n]\times\{0\}} = \bar{\omega}$，$h|_{\Delta[n]^{n-1}\times\Delta[1]} = \bar{l}_{\psi\psi_\alpha} \circ P_r$ とする。ただし，P_r は第 2 成分への射影とする。図式 (4.1) において実線の矢線は可換となる。すなわち，$p \circ h = p \circ \bar{l}_{\psi\psi_\alpha} \circ P_r \circ i$ である。ここで，i は包含写像とする。被覆ホモトピー拡張性質により，図式 (4.1) 中の破線による矢線で記入されている単体写像 $H : \Delta[n] \times \Delta[1] \to E$ が存在し，図式全体は可換となる。

(4.1)
$$\begin{array}{ccccc}
\Delta[n] \times \{0\} \cup \Delta[n]^{n-1} \times \Delta[1] & & \xrightarrow{\quad h \quad} & & E \\
{\scriptstyle i}\downarrow & & \overset{H}{\nearrow} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\
\Delta[n] \times \Delta[1] & \xrightarrow[P_r]{} & \Delta[1] & \xrightarrow[p \circ \bar{l}_{\psi\psi_\alpha}]{} & B
\end{array}$$

このとき，$H(\Delta[n] \times \{1\})$ は $\pi_n(F_{\phi_\alpha}, \psi_\alpha)$ の元を代表する。$l^{\#}_{\psi\psi_\alpha}([\omega])$ は，

$$l^{\#}_{\psi\psi_\alpha}([\omega]) = [\,H(\Delta[n] \times \{1\})\,]$$

により定義される。$\psi_\alpha = \psi$ の場合，$l^{\#}_{\psi\psi}$ は $\pi_1(E, \psi)$ の $\pi_n(F_\phi, \psi)$ への作用を定義する。

$\pi_n(F_\phi, \psi)$ の部分群 $\mathfrak{g}$ は $\pi_1(E, \psi)$ の作用で閉じているとする。このとき，F_ϕ の頂点 ψ と F_{ϕ_α} の頂点 ψ_α を結ぶ 1-単体 $l_{\psi\psi_\alpha}$ から誘導される同型写像 $l^{\#}_{\psi\psi_\alpha} : \pi_n(F_\phi, \psi) \cong \pi_n(F_{\phi_\alpha}, \psi_\alpha)$ により $\gamma \in \pi_n(F_\alpha, \psi_\alpha)$ が $\mathfrak{g}$ の元に対応するならば，ψ と ψ_α を結ぶ他の 1-単体 $l'_{\psi\psi_\alpha}$ から誘導される同

型写像 $l'^{\#}_{\psi\psi_\alpha}:\pi_n(F_\phi,\psi)\cong\pi_n(F_{\phi_\alpha},\psi_\alpha)$ によっても γ は $\mathfrak{g}$ の元に対応する。このことは，ψ と ψ_α を結ぶ 1-単体から誘導される同型写像 $\pi_n(F_\phi,\psi)\cong\pi_n(F_{\phi_\alpha},\psi_\alpha)$ の性質と，$\mathfrak{g}$ は $\pi_1(E,\psi)$ の作用で閉じていることからわかる。したがって，$\gamma\in\pi_n(F_{\phi_\alpha},\psi_\alpha)$ に対応する $\mathfrak{g}$ の元は，$\pi_n(F_\phi,\psi)$ と $\pi_n(F_{\phi_\alpha},\psi_\alpha)$ の同型対応を定義する（ψ と ψ_α を結ぶ）1-単体により異なる可能性はあるが，γ に対応する元が $\mathfrak{g}$ に属すという性質は保たれる。したがって，(1.8) は成り立つ。

x，y，z は E の q-単体とし，α を $\Delta[q]$ の任意の n-単体とする。(2.2) と (2.3) より $[\,x|_\alpha\ominus x|_\alpha\,]=0\in\pi_n(F_{\phi_\alpha},\psi_\alpha)$ である。明らかに，$[\,x|_\alpha\ominus x|_\alpha\,]$ は $0\in\mathfrak{g}$ に対応する。したがって，

$$x\overset{(n,\mathfrak{g})}{\sim}x \tag{4.2}$$

である。次に，$x\overset{(n,\mathfrak{g})}{\sim}y$ と仮定する。(3.1) より

$$[\,x|_\alpha\ominus y|_\alpha\,]+[\,y|_\alpha\ominus x|_\alpha\,]=[\,x|_\alpha\ominus x|_\alpha\,]$$

が成り立ち，$[\,x|_\alpha\ominus x|_\alpha\,]=0$ であるから，

$$[\,y|_\alpha\ominus x|_\alpha\,]=-[\,x|_\alpha\ominus y|_\alpha\,]$$

となる。右辺が $\mathfrak{g}$ の元に対応するので，左辺の $[\,y|_\alpha\ominus x|_\alpha\,]$ も $\mathfrak{g}$ の元に対応する。すなわち，

$$y\overset{(n,\mathfrak{g})}{\sim}x \tag{4.3}$$

である。最後に，$x\overset{(n,\mathfrak{g})}{\sim}y$，$y\overset{(n,\mathfrak{g})}{\sim}z$ と仮定する。このとき，$[\,x|_\alpha\ominus y|_\alpha\,]$ と $[\,y|_\alpha\ominus z|_\alpha\,]$ はともに $\mathfrak{g}$ の元に対応する。(3.1) より，

$$[\,x|_\alpha\ominus z|_\alpha\,]=[\,x|_\alpha\ominus y|_\alpha\,]+[\,y|_\alpha\ominus z|_\alpha\,]$$

であり，$[\,x|_\alpha\ominus z|_\alpha\,]$ は $\mathfrak{g}$ の元に対応することがわかる。したがって，

$$x\overset{(n,\mathfrak{g})}{\sim}z \tag{4.4}$$

となる。(4.2)，(4.3)，(4.4) により補題 1 が成り立つことが確認された。

注記

用語の定義，説明の出典は以下の通りである。

用語	原語	参考文献; ページ	項目
Kan 複体	Kan complex	2) ; P.3	CONVENTION 1.6
極小な Kan 複体	minimal Kan complex	2) ; P.35	DFINITION 9.1
Kan ファイバー空間	Kan fibration	2) ; P.25	DEFINITION 7.1
極小な Kan ファイバー空間	minimal Kan fibration	2) ; P.40	DEFINITION 10.1

参考文献

1) A.K. Bousfield, D.M. Kan, *Homotopy Limits, Completions and Localizations,* LNM 304, Springer-Verlag (1972)

2) J.P. May, *Simplicial Objects in Algebraic Topology,* D.Van Nostrand Company, Inc. (1967)

3) 日本数学会編, 数学辞典第 4 版, 岩波書店 (2007)