流通科学大学論集－流通・経営編－第21巻第1号, 25-36(2008)

面積法を用いた非ファジィ化の連続性

Continuity of Defuzzification Using Area Method

三石 貴志 †
Takashi Mitsuishi

ファジィ制御に用いられる推論計算の非ファジィ化の一つである面積法に関して考察を行った。面積法を状態変数空間上の関数もしくはメンバシップ関数集合上の汎関数とみなし、それぞれに対し連続性を証明した。それらの応用として、IF-THEN ルールを構成するファジィ集合族のコンパクト性とあわせてファジィフィードバック制御の最適制御問題を汎関数の最小値問題とみなし変分問題に帰着させ、最適解の存在定理を証明した。

キーワード： ファジィ推論、非ファジィ化、面積法、連続性、最適制御問題

I. はじめに

L. A. Zadeh [1] の提案したファジィ理論により定性的な言語表現を定量的に扱うことが可能になった。このファジィ理論はその後様々な分野に応用され、その主たるものは E. H. Mamdani [2] が最初に試みた制御工学分野である。このファジィ制御は、熟練したオペレータが定性的に会得している「～ならば～せよ」なる技や知識をファジィ推論を行うことにより、オペレータが行うものと近い技術をコンピュータで定量的に実現しようというものである。Mamdani method は最初に提案された推論法で、以後代数積-加算-重心法 [3]、簡略型推論法 [4]、高木-菅野モデル（関数型推論法）[5] 等様々な方法が提案されている。これらはほとんど非ファジィ化の手続きとして重心法を採用している。しかしながら、重心法以外にも最大平均法、最大中点法、中央値法、高さ法、最大高さ法、面積法、最大面積法 [6] などの非ファジィ化法も提案されている。筆者らはこれまで重心法より比較的良好な結果が得られている高さ法、面積法のうち高さ法に関して数理的解析を行った [7]。本研究では、面積法について同様の解析を行う。後述するが、面積法は高さ法の一般化である。したがって、本研究は従来の成果の拡張といえる。本論文の構成は以下のようになっている。II、III 章では本研究で扱うファジィ制御系の設定に関して述べている。IV、V 章では面積法を用いたファジィ推論計算を紹介している。VI 章では II、III 章における設定に加え、ファジィ集合族にある条件の追加を行った。VII、VIII 章では面積法の汎関数としての連続性および

† 流通科学大学情報学部、〒651-2188 神戸市西区学園西町3-1

（2008年 4 月 3 日受理）

Lipschitz 連続性の証明が述べられている。それらの事実を基に、IX 章では推論計算を合成汎関数とみなし、ファジィフィードバック制御の最適制御問題を変分問題に帰着させ、最適解の存在定理を証明した。最後に X 章ではそれらの事実をまとめ今後の課題を見出し論じている。

II. ファジィフィードバック制御

$\boldsymbol{R}^n$ を n 次元ユークリッド空間とし、ノルムを $\|\cdot\|$ で表す。$f(y,v):\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^n$ を Lipschitz 連続な非線型ベクトル値関数とする。また定数 $M_f>0$ が存在し、任意の $(y,v)\in\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}$ に対し

$$\|f(y,v)\|\le M_f\left(\|y\|+|v|+1\right) \tag{1}$$

が成り立つと仮定する。

以下の状態方程式によって与えられる非線型フィードバックシステムについて考える。

$$\dot{x}(t)=f(x(t),u(t)) \tag{2}$$

ここで $x(t)$ は時間 t におけるシステムの状態を表し、制御入力 $u(t)$ は $u(t)=\rho(x(t))$ のフィードバック形式で与えるものとする。

システムにおける初期値のとりうる値の集合を、十分大きな正数 $r>0$ に対し

$$B_r=\{x\in\boldsymbol{R}^n:\|x\|\le r\}$$

とし、十分大きな終端時刻を T とする。このとき、以下の命題が成立している。

[命題 1] [8] $\rho:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ を Lipschitz 連続、$x_0\in B_r$ とする。このとき状態方程式

$$\dot{x}(t)=f(x(t),\rho(x(t))) \tag{3}$$

は初期条件 $x(0)=x_0$ のもとで $[0,T]$ において一意の解 $x(t,x_0,\rho)$ をもち

$$(t,x_0)\in[0,T]\times B_r\mapsto x(t,x_0,\rho)$$

は連続である。さらに任意の $r_2>0$ に対し

$$\Phi=\{\rho:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}:\forall u,u'\in\boldsymbol{R}\ |\rho(u')-\rho(u)|\le\|u'-u\|,\ \sup_{u\in\boldsymbol{R}^n}|\rho(u)|\le r_2\} \tag{4}$$

とおくと、状態方程式の解について以下の (a), (b) が成り立つ.

(a) 任意の $t\in[0,T],x_0\in B_r$ および $\rho\in\Phi$ に対し

$$\|x(t,x_0,\rho)\|\le r_1. \tag{5}$$

ただし

$$r_1=e^{M_fT}r+(e^{M_fT}-1)(r_2+1). \tag{6}$$

(b) $\rho_1, \rho_2 \in \Phi$ とする。任意の $t \in [0,T]$, $x_0 \in B_r$ に対し

$$\|x(t,x_0,\rho_1) - x(t,x_0,\rho_2)\| \leq \frac{e^{L_f\,(1+L_{\rho_1})t} - 1}{1 + L_{\rho_1}} \sup_{u \in [-r_1,r_1]^n} |\rho_1(u) - \rho_2(u)|. \tag{7}$$

ただし L_f, L_{ρ_1} はそれぞれ f, ρ_1 の Lipschitz 定数。

III. IF-THEN 型ファジィプロダクションルール

本研究では、上述の制御入力 $u(t) = \rho(x(t))$ を以下の IF-THEN 型ファジィプロダクションルール上で面積法を用いた推論法により構成する。

$$\begin{aligned}
&\text{rule 1: } IF\ x_1\ is\ A_{11}\ and\ \ldots\ and\ x_j\ is\ A_{1j}\ and\ \ldots\ and\ x_n\ is\ A_{1n}\\
&\qquad THEN\ y\ is\ B_1\\
&\qquad\vdots\\
&\text{rule } i\text{: } IF\ x_1\ is\ A_{i1}\ and\ \ldots\ and\ x_j\ is\ A_{ij}\ and\ \ldots\ and\ x_n\ is\ A_{in}\\
&\qquad THEN\ y\ is\ B_i\\
&\qquad\vdots\\
&\text{rule } m\text{: } IF\ x_1\ is\ A_{m1}\ and\ \ldots\ and\ x_j\ is\ A_{mj}\ and\ \ldots\ and\ x_n\ is\ A_{mn}\\
&\qquad THEN\ y\ is\ B_m
\end{aligned} \tag{8}$$

ここで、m は IF-THEN 型ファジィプロダクションルールの数を表し、$x_j \in [-r_1, r_1]$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, $y \in [-r_2, r_2]$ はそれぞれ前件部、後件部変数である。ただし r_1, r_2 は前節で定められた正定数とする。本研究ではファジィ集合 A_{ij} のメンバシップ関数 $\mu_{A_{ij}}$ およびファジィ集合 B_i のメンバシップ関数 μ_{B_i} はそれぞれ次に示すメンバシップ関数集合 $F_{\Delta_{ij}}$、G に属すると仮定する。

$$\begin{aligned}
F_{\Delta_{ij}} = \{\mu \in C[-r_1, r_1] : \forall x \in [-r_1, r_1]\ 0 \leq \mu(x) \leq 1,&\\
\forall x, x' \in [-r_1, r_1]\ |\mu(x) - \mu(x')| \leq \Delta_{ij}|x - x'|\}&
\end{aligned} \tag{9}$$

$$G = \{\mu \in C[-r_2, r_2] : \forall x \in [-r_2, r_2]\ 0 \leq \mu(x) \leq 1\} \tag{10}$$

$C(\boldsymbol{R})$ は連続関数空間とし、$\Delta_{ij} > 0$ を Lipschitz 定数とする。このとき、メンバシップ関数全体の集合は以下の直積集合

$$\mathcal{F} = \prod_{i=1}^{m} \left\{ \prod_{j=1}^{n} F_{\Delta_{ij}} \right\} \times G^m \tag{11}$$

で表すことができる。表現を簡単にするために、前件部と後件部のメンバシップ関数の多重対をそれぞれ以下のように表す。

$$\mathcal{A}_i = (\mu_{A_{i1}}, \ldots, \mu_{A_{in}}) \quad (i = 1, \ldots, m), \quad \mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m), \quad \mathcal{B} = (\mu_{B_1}, \ldots, \mu_{B_m}).$$

さらに、前件部変数ベクトルを $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ とおく。ファジィ制御において通常用いられるメンバシップ関数は実数空間上で定義された三角型、台形型、釣鐘型、Z 型および S 型などである。メンバシップ関数の台集合である閉区間 $[-r_1,r_1]$, $[-r_2,r_2]$ を十分大きくとることにより実用上ほとんどのメンバシップ関数が式 (9)、(10) で定義された集合に含まれる。したがって、これらの設定は通常行われるファジィ制御の一般化であるから以後展開される議論はほとんどの分野にて適用可能であると考える。

IV.　ファジィ推論法

(8) で示されたファジィ規則に前件部変数の確定値 (制御対象の出力値)$x^*=(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)\in[-r_1,r_1]^n$ が与えられたとき、推論結果の確定値 (制御対象への入力値) を計算する方法は、一般的に次の 4 つの過程を経る。

(過程 1) 与えられた状態変数の確定値に対して前件部の適合度を求める。

(過程 2) 前件部の適合度を後件部のメンバシップ関数に反映させ各ルールの推論結果を求める。

(過程 3) 各ルールの推論結果を統合してルール全体の推論結果を求める。

(過程 4) ルール全体の推論結果はメンバシップ関数であるので制御対象へ確定値を出力するために重心法による非ファジィ化を行う。

Mamdani method は推論過程において計算に min、max 演算を用いている。これらの演算の非線形性により、各ルールの適合度、推論結果等の値のスムースな変化が得られない。その上、推論過程が直感的ではない。以上の理由から、Mamdani method のすべての計算において、min 演算を代数積（掛算）に、max 演算を加算（足し算）に変更した代数積-加算-重心法が水本により提案された [3]。水本の報告によると、推論法として Mamdani method を用いた場合より良好な制御結果が得られたとされている。

本研究では、面積法を用いた非ファジィ化の計算法について考察する。一般的に面積法を用いた推論の場合、過程 1 および 2 は Mamdani method や代数積-加算-重心法の計算方法同様、min 演算や代数積を採用する。過程 3 および 4 については、ファジィ集合で表された各ルールの推論結果を統合する前に各ルールの後件部のファジィ集合の代表値を重心法により求める。そして非ファジィ化の面積法は、代表値を各ルールの推論結果の面積で加重平均をとるものである。以下、計算過程を示す。

(過程 1) 第 i 番目のルールの前件部の適合度 $\alpha_{\mathcal{A}_i}(x^*)$ を求める。

$$\alpha_{\mathcal{A}_i}(x^*)=\bigwedge_{j=1}^{n}\mu_{A_{ij}}(x_j^*) \text{ または } \alpha_{\mathcal{A}_i}(x^*)=\prod_{j=1}^{n}\mu_{A_{ij}}(x_j^*) \quad (i=1,2,\ldots,m).$$

(過程 2) 第 i 番目のルールの推論結果を求める。

$$\beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x^*,y)=\alpha_{\mathcal{A}_i}(x^*)\wedge\mu_{B_i}(y) \text{ または } \beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x^*,y)=\alpha_{\mathcal{A}_i}(x^*)\mu_{B_i}(y) \quad (i=1,2,\ldots,m).$$

(過程 3) 第 i 番目のルールの推論結果のクリスプな代表値を重心法により求める。

$$\gamma_{\mathcal{A}B_i}(x^*) = \frac{\int_{-r_2}^{r_2} y\beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x^*, y)dy}{\int_{-r_2}^{r_2} \beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x^*, y)dy} \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

ただし後件部のメンバシップ関数が左右対称である場合などは、(過程 2) の結果に影響を受けず代表点は常に一定となり

$$\frac{\int_{-r_2}^{r_2} y\beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x^*, y)dy}{\int_{-r_2}^{r_2} \beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x^*, y)dy} = \frac{\int_{-r_2}^{r_2} y\mu_{B_i}(y)dy}{\int_{-r_2}^{r_2} \mu_{B_i}(y)dy}$$

であることもある。

(過程 4) ファジィルール全体における推論結果を面積法により求める (非ファジィ化)。

$$\rho_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(x^*) = \frac{\sum_{i=1}^{m} S_{\mathcal{A}_iB_i}(x^*)\gamma_{\mathcal{A}B_i}(x^*)}{\sum_{i=1}^{m} S_{\mathcal{A}_iB_i}(x^*)}.$$

ただし

$$S_{\mathcal{A}_iB_i}(x^*) = \int_{-r_2}^{r_2} \beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x^*, y)dy \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

である。他に後件部を定数とした簡略推論法 [4] や簡略推論法を一般化した関数型推論法 [5] が紹介されているが本論文では扱わない。各過程において、関数 α, β, γ, ρ, S に添え字としてメンバシップ関数の多重対 $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ を付した。これはそれぞれの計算式および値が前件部変数だけでなくメンバシップ関数にも依存していることを明示するためである。ただし、β および γ の添え字 B_i はメンバシップ関数 μ_{B_i} である。

V. 他の推論法との関係

推論法は、推論計算において min($\wedge$), max($\vee$) 演算と積、和演算のどちらを用いるか、または IF-THEN ルールの後件部はファジィ集合、クリスプ値もしくは通常の関数であるかによって分別される。

非ファジィ化に面積法を採用した推論法（以下、面積法）の後件部のメンバシップ関数が対称な形状で、かつすべての面積が等しいとき面積法と高さ法の推論結果は同値となる。すなわち高さ法は面積法の特殊な場合であるとみなされる。また、面積法と高さ法で後件部がファジィ集合でなくクリスプな値であれば簡略推論法と同じである。面積法の推論計算を変形すると、

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} S_{\mathcal{A}_iB_i}(x)\gamma_{\mathcal{A}B_i}(x)}{\sum_{i=1}^{m} S_{\mathcal{A}_iB_i}(x)} = \sum_{i=1}^{m}\int_{-r_2}^{r_2} \beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x, y)dy \frac{\int_{-r_2}^{r_2} y\beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x, y)dy}{\int_{-r_2}^{r_2} \beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x, y)dy} \Bigg/ \sum_{i=1}^{m}\int_{-r_2}^{r_2} \beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x, y)dy$$

$$= \frac{\int_{-r_2}^{r_2} y\sum_{i=1}^{m} \beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x, y)dy}{\int_{-r_2}^{r_2} \sum_{i=1}^{m} \beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x, y)dy}$$

であるから、前節 (過程 2) で積演算を用いれば面積法は代数積-加算-重心法と同一となる。高さ法と中森の推論法 [9] の違いは非ファジィ化された結果を前件部の推論結果で加重平均するか、メ

ンバシップ関数のまま加重平均し最後に重心法で非ファジィ化を行うかの違いである。このようにIF-THEN型ファジィプロダクションルール上で推論される方法はMamdani methodを基本として同じような計算構造を持っている。

VI. メンバシップ関数集合への条件付け

前節の計算過程の重心法および非ファジィ化において分数式が現れる。これらの分母が0になることを避けるため、式(11)のメンバシップ関数集合に条件を加えた以下のような部分集合を定義する。

$$\mathcal{F}_\delta = \left\{(\mathcal{A},\mathcal{B}) \in \mathcal{F} \ : \ \forall x \in [-r_1, r_1]^n, \forall i = 1,2,\ldots,m \int_{-r_2}^{r_2} \beta_{\mathcal{A}_i B_i}(x,y)dy \geq \delta\right\} \tag{12}$$

ただし、δは任意の正定数である。定義式から分かるように、この集合に属しないメンバシップ関数の対は、ある$x \in [-r_1, r_1]^n$が与えられたとき、前件部の適合度$\alpha_{\mathcal{A}_i}(x)$がすべてのルール、つまりすべての$i = 1,2,\ldots,m$に対して0となるものである。しかしながら、実制御においてそのような設定を行うことは想定されない。また、δを十分小さな値とすれば実用上影響はほとんどないと考える。

VII. 面積法のメンバシップ関数集合上の汎関数としての連続性

本節では、面積法を用いた非ファジィ化$\rho : \mathcal{F}_\delta \to [-r_2, r_2]$が前節の式(12)で定義したメンバシップ関数集合$\mathcal{F}_\delta$の上の汎関数として連続であることを示す。すなわち、任意の$x \in [-r_1, r_1]^n$に対して$(\mathcal{A}^k, \mathcal{B}^k) \to (\mathcal{A}, \mathcal{B})$ $(k \to \infty)$ならば$|\rho_{\mathcal{A}^k \mathcal{B}^k}(x) - \rho_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(x)| \to 0$であることを示す。各ルールにおける前件部の適合度を求める(過程1)の関数αは、min演算と積演算のどちらを採用した場合においても、すべての$i = 1,2,\ldots,m$について$\mu_{A^k_{ij}} \to \mu_{A_{ij}}$ $(i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n)$ならば

$$\|\alpha_{\mathcal{A}^k_i} - \alpha_{\mathcal{A}_i}\|_\infty = \sup_{x \in [-r_1, r_1]^n} |\alpha_{\mathcal{A}^k_i}(x) - \alpha_{\mathcal{A}_i}(x)| \to 0$$

が明らかに成立している。すなわち、汎関数$\alpha : \mathcal{F}_\delta \to [0,1]$は連続である。

さらに、(過程2)の積演算を用いる$\beta_{\mathcal{A}_i B_i}(x,y) = \alpha_{\mathcal{A}_i}(x)\mu_{B_i}(y)$の連続性も明らかに成立している。したがって、一般に頭切り法と呼ばれる$\beta_{\mathcal{A}_i B_i}(x,y) = \alpha_{\mathcal{A}_i}(x) \wedge \mu_{B_i}(y)$の連続性を証明する。任意の$\phi,\ \psi \geq 0$に対して、

$$\phi \wedge \psi = \frac{\phi + \psi - |\phi - \psi|}{2}$$

であることを用いると。

$$|\beta_{\mathcal{A}^k_i B^k_i}(x,y) - \beta_{\mathcal{A}_i B_i}(x,y)| = |\alpha_{\mathcal{A}^k_i}(x) \wedge \mu_{B^k_i}(y) - \alpha_{\mathcal{A}_i}(x) \wedge \mu_{B_i}(y)|$$

$$\frac{1}{2}|\alpha_{\mathcal{A}_i^k}(x)+\mu_{B_i^k}(y)-|\alpha_{\mathcal{A}_i^k}(x)-\mu_{B_i^k}(y)|-(\alpha_{\mathcal{A}_i}(x)+\mu_{B_i}(y)-|\alpha_{\mathcal{A}_i}(x)-\mu_{B_i}(y)|)|$$
$$\leq \frac{1}{2}\{|\alpha_{\mathcal{A}_i^k}(x)-\alpha_{\mathcal{A}_i}(x)|+|\mu_{B_i^k}(y)-\mu_{B_i}(y)|+||\alpha_{\mathcal{A}_i^k}(x)-\mu_{B_i^k}(y)|-|\mu_{B_i}(y)-\alpha_{\mathcal{A}_i}(x)||\}$$
$$\leq \frac{1}{2}\{|\alpha_{\mathcal{A}_i^k}(x)-\alpha_{\mathcal{A}_i}(x)|+|\mu_{B_i^k}(y)-\mu_{B_i}(y)|+|(\alpha_{\mathcal{A}_i^k}(x)-\mu_{B_i^k}(y))+(\mu_{B_i}(y)-\alpha_{\mathcal{A}_i}(x))|\}$$
$$\leq |\alpha_{\mathcal{A}_i^k}(x)-\alpha_{\mathcal{A}_i}(x)|+|\mu_{B_i^k}(y)-\mu_{B_i}(y)|$$

を得る。ここで、$(\mathcal{A}^k,\mathcal{B}^k)\to(\mathcal{A},\mathcal{B})$ $(k\to\infty)$ と仮定する。すなわちすべての $i=1,2,\dots,m$ に対して

$$\|\alpha_{\mathcal{A}_i^k}-\alpha_{\mathcal{A}_i}\|_\infty\to 0$$

および

$$\|\mu_{B_i^k}-\mu_{B_i}\|_\infty=\sup_{y\in[-r_2,r_2]}|\mu_{B_i^k}(y)-\mu_{B_i}(y)|\to 0$$

であるとすると、上の式より

$$\lim_{k\to\infty}\|\beta_{\mathcal{A}_i^kB_i^k}-\beta_{\mathcal{A}_iB_i}\|_\infty=\lim_{k\to\infty}\sup_{x,y}|\beta_{\mathcal{A}_i^kB_i^k}(x,y)-\beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x,y)|=0.$$

つまり α との合成写像 $\beta:\mathcal{F}_\delta\to C[-r_2,r_2]$ は連続である。

次に、式 (12) よりすべての $i=1,2,\dots,m$ について $\int_{-r_2}^{r_2}\beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x,y)dy\geq\delta$ であること、$|\alpha_{\mathcal{A}_i}(x)|\leq 1$ $(\forall x\in[-r_1,r_1]^n)$ であることに注意して、三角不等式および Schwarz の不等式を用いると、

$$|\gamma_{\mathcal{A}^kB_i^k}(x)-\gamma_{\mathcal{A}B_i}(x)|=\left|\frac{\int_{-r_2}^{r_2}y\beta_{\mathcal{A}_i^kB_i^k}(x,y)dy}{\int_{-r_2}^{r_2}\beta_{\mathcal{A}_i^kB_i^k}(x,y)dy}-\frac{\int_{-r_2}^{r_2}y\beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x,y)dy}{\int_{-r_2}^{r_2}\beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x,y)dy}\right|$$
$$\leq\frac{1}{\delta^2}\left\{\left|\int_{-r_2}^{r_2}y\beta_{\mathcal{A}_i^kB_i^k}(x,y)dy\right|\left|\int_{-r_2}^{r_2}\beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x,y)dy-\int_{-r_2}^{r_2}\beta_{\mathcal{A}_i^kB_i^k}(x,y)dy\right|\right.$$
$$\left.+\left|\int_{-r_2}^{r_2}\beta_{\mathcal{A}_i^kB_i^k}(x,y)dy\right|\left|\int_{-r_2}^{r_2}y\beta_{\mathcal{A}_i^kB_i^k}(x,y)dy-\int_{-r_2}^{r_2}y\beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x,y)dy\right|\right\}$$
$$\leq\frac{{r_2}^2}{\delta^2}\left|\int_{-r_2}^{r_2}(\beta_{\mathcal{A}_i^kB_i^k}(x,y)-\beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x,y))dy\right|+\frac{2r_2}{\delta^2}\left|\int_{-r_2}^{r_2}y(\beta_{\mathcal{A}_i^kB_i^k}(x,y)-\beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x,y))dy\right|$$
$$\leq\frac{{r_2}^2}{\delta^2}\left|\int_{-r_2}^{r_2}\sup|\beta_{\mathcal{A}_i^kB_i^k}(x,y)-\beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x,y)|dy\right|+\frac{2r_2}{\delta^2}\left|\int_{-r_2}^{r_2}y\sup|\beta_{\mathcal{A}_i^kB_i^k}(x,y)-\beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x,y)|dy\right|$$
$$\leq\frac{{r_2}^2}{\delta^2}\left|\int_{-r_2}^{r_2}\|\beta_{\mathcal{A}_i^kB_i^k}-\beta_{\mathcal{A}_iB_i}\|_\infty dy\right|+\frac{2r_2}{\delta^2}\|\beta_{\mathcal{A}_i^kB_i^k}-\beta_{\mathcal{A}_iB_i}\|_\infty\left|\int_{-r_2}^{r_2}ydy\right|$$
$$\leq\frac{2{r_2}^3}{\delta^2}\|\beta_{\mathcal{A}_i^kB_i^k}-\beta_{\mathcal{A}_iB_i}\|_\infty.$$

ゆえに

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{x\in[-r_1,r_1]^n}|\gamma_{\mathcal{A}^kB_i^k}(x)-\gamma_{\mathcal{A}B_i}(x)|=0$$

を得る。ゆえに、(過程 3) における各制御規則のそれぞれの結論ファジィ集合の代表値を求める重心法 $\gamma : \mathcal{F}_\delta \to [-r_2, r_2]$ が $\mathcal{F}_\delta$ 上の合成汎関数として連続であることが証明された。

次に、各制御規則から推論された個々のファジィ集合（メンバシップ関数）$\beta_{A_iB_i}(x,y)$ の面積を求める計算式について連続性を導く。

$$\begin{aligned}|S_{\mathcal{A}_i^k\mathcal{B}_i^k}(x) - S_{\mathcal{A}_iB_i}(x)| &= \left|\int_{-r_2}^{r_2} \beta_{\mathcal{A}_i^k\mathcal{B}_i^k}(x,y)dy - \int_{-r_2}^{r_2} \beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x,y)dy\right| \\ &\le \left|\int_{-r_2}^{r_2} \sup_{y\in[-r_2,r_2]} |\beta_{\mathcal{A}_i^k\mathcal{B}_i^k}(x,y)dy - \beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x,y)|dy\right| \\ &\le 2r_2\|\beta_{\mathcal{A}_i^k\mathcal{B}_i^k} - \beta_{\mathcal{A}_iB_i}\|_\infty.\end{aligned}$$

これより $\mathcal{F}_\delta$ 上の連続性が成立する。同様にして、式 (12) より $\displaystyle\sum_{i=1}^m S_{\mathcal{A}_iB_i}(x) \ge m\delta$ であることを用いて式変形すると

$$\begin{aligned}|\rho_{\mathcal{A}^k\mathcal{B}^k}(x) - \rho_{\mathcal{AB}}(x)| &= \left|\frac{\sum_{i=1}^m S_{\mathcal{A}_i^k\mathcal{B}_i^k}(x)\gamma_{\mathcal{A}^k\mathcal{B}_i^k}(x)}{\sum_{i=1}^m S_{\mathcal{A}_i^k\mathcal{B}_i^k}(x)} - \frac{\sum_{i=1}^m S_{\mathcal{A}_iB_i}(x)\gamma_{\mathcal{A}B_i}(x)}{\sum_{i=1}^m S_{\mathcal{A}_iB_i}(x)}\right| \\ &\le \frac{1}{m^2\delta^2}\left\{\left|\sum_{i=1}^m S_{\mathcal{A}_iB_i}(x)\right|\left|\sum_{i=1}^m S_{\mathcal{A}_i^k\mathcal{B}_i^k}(x)\gamma_{\mathcal{A}^k\mathcal{B}_i^k}(x) - \sum_{i=1}^m S_{\mathcal{A}_iB_i}(x)\gamma_{\mathcal{A}B_i}(x)\right|\right. \\ &\qquad \left. + \left|\sum_{i=1}^m S_{\mathcal{A}_iB_i}(x)\gamma_{\mathcal{A}B_i}(x)\right|\left|\sum_{i=1}^m S_{\mathcal{A}_iB_i}(x) - \sum_{i=1}^m S_{\mathcal{A}_i^k\mathcal{B}_i^k}(x)\right|\right\} \\ \le \frac{1}{m^2\delta^2}&\left\{2mr_2\sum_{i=1}^m(|S_{\mathcal{A}_i^k\mathcal{B}_i^k}(x)||\gamma_{\mathcal{A}^k\mathcal{B}_i^k}(x) - \gamma_{\mathcal{A}B_i}(x)| + |\gamma_{\mathcal{A}B_i}(x)||S_{\mathcal{A}_i^k\mathcal{B}_i^k}(x) - S_{\mathcal{A}_iB_i}(x)|)\right. \\ &\qquad \left. +2mr_2{}^2\sum_{i=1}^m |S_{\mathcal{A}_i^k\mathcal{B}_i^k}(x) - S_{\mathcal{A}_iB_i}(x)|\right\} \\ &\le \frac{4r_2{}^2}{m\delta^2}\left\{\sum_{i=1}^m |\gamma_{\mathcal{A}^k\mathcal{B}_i^k}(x) - \gamma_{\mathcal{A}B_i}(x)| + \sum_{i=1}^m |S_{\mathcal{A}_i^k\mathcal{B}_i^k}(x) - S_{\mathcal{A}_iB_i}(x)|\right\}\end{aligned}$$

を得るので、面積法を用いたファジィ推論法 $\rho : \mathcal{F}_\delta \to [-r_2, r_2]$ は $\mathcal{F}_\delta$ 上の汎関数として連続である。

VIII.　前件部変数上の Lipschitz 連続性と状態方程式の解の一意存在

本節では、面積法を用いた非ファジィ化の計算が前件部変数上の合成関数として Lipschitz 連続であることを示す。

推論過程の α 計算および β 計算に関して、min 演算、積演算どちらを用いた場合でも Lipschitz 連続である。すなわち、Lipschitz 連続関数 α_{A_i} $(i = 1, 2, \ldots, m)$ の Lipschitz 定数を Δ_{α_i} とおくと、任意の $x, x' \in [-r_1, r_1]^n$ に対して、

$$|\alpha_{A_i}(x) - \alpha_{A_i}(x')| \le \Delta_{\alpha_i}\|x - x'\|$$

および

$$|\beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x,y)-\beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x',y)|\le\Delta_{\alpha_i}\|x-x'\|$$

が成り立っている [10)]。これより、明らかに

$$|S_{\mathcal{A}_iB_i}(x)-S_{\mathcal{A}_iB_i}(x')|\le\left|\int_{-r_2}^{r_2}|\beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x,y)-\beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x',y)|dy\right|\le 2r_2\Delta_{\alpha_i}\|x-x'\|.$$

式 (12) より、$\int_{-r_2}^{r_2}\beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x,y)dy\ge\delta$ を用いると、前節と同様な式変形を使って

$$|\gamma_{\mathcal{A}B_i}(x)-\gamma_{\mathcal{A}B_i}(x')|=\left|\frac{\int_{-r_2}^{r_2}y\beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x,y)dy}{\int_{-r_2}^{r_2}\beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x,y)dy}-\frac{\int_{-r_2}^{r_2}y\beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x',y)dy}{\int_{-r_2}^{r_2}\beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x',y)dy}\right|$$

$$\le\frac{{r_2}^2}{\delta^2}\left|\int_{-r_2}^{r_2}|\beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x,y)-\beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x',y)|dy\right|+\frac{2r_2}{\delta^2}\left|\int_{-r_2}^{r_2}y|\beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x,y)-\beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x',y)|dy\right|$$

$$\le\frac{4{r_2}^3\Delta_{\alpha_i}}{\delta^2}\|x-x'\|.$$

また、定義式から $|\gamma_{\mathcal{A}B_i}(x)|\le r_2$ であること、および上述の Lipschitz 連続性を用いると以下の式を得る。

$$|\rho_{\mathcal{AB}}(x)-\rho_{\mathcal{AB}}(x')|=\left|\frac{\sum_{i=1}^m S_{\mathcal{A}_iB_i}(x)\gamma_{\mathcal{A}B_i}(x)}{\sum_{i=1}^m S_{\mathcal{A}_iB_i}(x)}-\frac{\sum_{i=1}^m S_{\mathcal{A}_iB_i}(x')\gamma_{\mathcal{A}B_i}(x')}{\sum_{i=1}^m S_{\mathcal{A}_iB_i}(x')}\right|$$

$$\le\frac{4{r_2}^2}{m\delta^2}\left\{\sum_{i=1}^m|\gamma_{\mathcal{A}B_i}(x)-\gamma_{\mathcal{A}B_i}(x')|+\sum_{i=1}^m|S_{\mathcal{A}_iB_i}(x)-S_{\mathcal{A}_iB_i}(x')|\right\}$$

$$\le\left(\frac{2{r_2}^2}{\delta^2}+1\right)\frac{8{r_2}^3}{m\delta^2}\sum_{i=1}^m\Delta_{\alpha_i}\|x-x'\|.$$

ゆえに、面積法を用いた推論計算は前件部変数空間上で Lipschitz 連続である。

有界な Lipschitz 連続関数 $\rho:[-r_1,r_1]^n\to\boldsymbol{R}$ を、Lipschitz 定数及び有界性を変えることなく，$\boldsymbol{R}^n$ 上の関数 $\tilde{\rho}$ に拡張することができる [8)]。$(\mathcal{A},\mathcal{B})\in\mathcal{F}_\delta$ とすると、上述の事実から $\rho_{\mathcal{AB}}$ の拡張 $\tilde{\rho}_{\mathcal{AB}}$ は $\boldsymbol{R}^n$ 上で Lipschitz 連続であり，さらに $\rho_{\mathcal{AB}}$ と同じ Lipschitz 定数を持ち

$$\sup_{u\in\boldsymbol{R}^n}|\tilde{\rho}_{\mathcal{AB}}(u)|\le r_2$$

を満たす。ゆえに命題 1 から状態方程式 (2) はフィードバック則 $\rho_{\mathcal{AB}}$ に対し初期条件 $x(0)=x_0$ のもとで一意の解 $x(t,x_0,\tilde{\rho}_{\mathcal{AB}})$ を持つことがわかる [11)]。一般的に $\rho_{\mathcal{AB}}$ の拡張である $\tilde{\rho}_{\mathcal{AB}}$ は一意には決まらない。しかし解 $x(t,x_0,\tilde{\rho}_{\mathcal{AB}})$ は命題 1 の (7) 式より $\rho_{\mathcal{AB}}$ によって一意的に定まる。したがって以下 $\tilde{\rho}_{\mathcal{AB}}$ を $\rho_{\mathcal{AB}}$ と記述する。

IX. 最適制御問題への応用

フィードバック則 ρ による本研究の非線形フィードバックシステム (2) の性能を以下の評価関数によって評価する:

$$J = \int_{B_r} \int_0^T w(x(t,\zeta,\rho), \rho(x(t,\zeta,\rho)))dtd\zeta. \tag{13}$$

ここで $w : \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ は連続な正値関数、B_r は II 節で定めた初期値の集合である. また、状態変数 $x(\cdot,\cdot,\cdot) \in \boldsymbol{R}^n$ は時間、初期値およびフィードバック則、つまりファジィ推論に依存しているとする。以下の定理により (13) 式で与えられる評価関数を最小にするメンバシップ関数対（ファジィコントローラ）の存在が保証される。

[定理] 写像

$$(\mathcal{A},\mathcal{B}) \in \mathcal{F}_\delta \mapsto \int_{B_r} \int_0^T w(x(t,\zeta,\rho_{\mathcal{AB}}), \rho_{\mathcal{AB}}(x(t,\zeta,\rho_{\mathcal{AB}})))dtd\zeta$$

は (12) 式によって定義されるコンパクト距離空間 $\mathcal{F}_{\delta\sigma}$ において最小値 (最大値) を持つ.

(証明) $\mathcal{F}_\delta$ のコンパクト性とその上の写像の連続性が得られれば十分である。

Ascoli の定理より、各 $i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$ に対し, $\mathcal{F}_{\Delta_{ij}}$ は区間 $[-r_1, r_1]$ 上の連続関数空間 $C[-r_1, r_1]$ の部分空間として, 一様ノルム $\|\cdot\|_\infty$ でコンパクト集合になる [12)]。同様に G もコンパクト集合である。ゆえに、 Tychonoff の定理より式 (11) で定義された $\mathcal{F}$ は直積位相に関してコンパクト距離空間である。距離空間であることの証明は省略する。

つぎに $\mathcal{F}_\delta$ のコンパクト性について、$k \to \infty$ のとき $\{(\mathcal{A}^k, \mathcal{B}^k)\} \subset \mathcal{F}_\delta \to (\mathcal{A},\mathcal{B}) \in \mathcal{F}$ と仮定すると、各 $i = 1,2,\ldots,m$ に対し、

$$\|\alpha_{\mathcal{A}_i^k} - \alpha_{\mathcal{A}_i}\|_\infty = \sup_{x\in[-r_1,r_1]^n} |\alpha_{\mathcal{A}_i^k}(x) - \alpha_{\mathcal{A}_i}(x)| \to 0$$

および

$$\|\mu_{B_i^k} - \mu_{B_i}\|_\infty = \sup_{y\in[-r_2,r_2]} |\mu_{B_i^k}(y) - \mu_{B_i}(y)| \to 0$$

が成り立つ。そこで $x \in [-r_1, r_1]^n$ を固定すれば次式

$$\int_{-r_2}^{r_2} \beta_{B_i\mathcal{A}_i}(x,y)dy = \lim_{k\to\infty} \int_{-r_2}^{r_2} \beta_{B_i^k\mathcal{A}_i^k}(x,y)dy \geq \delta$$

は自明である。したがって $\mathcal{F}_\delta$ の定義より $(\mathcal{A},\mathcal{B}) \in \mathcal{F}_\delta$ である。ゆえに $\mathcal{F}_\delta$ は $\mathcal{F}$ の閉部分集合としてコンパクト距離空間となる。

最後に評価関数の連続性を証明する。VI 節で $\rho_{\mathcal{AB}}$ の汎関数としての連続性は証明済みである。したがって、$\mathcal{F}_\delta$ において $(\mathcal{A}^k, \mathcal{B}^k) \to (\mathcal{A},\mathcal{B})$ と仮定し、$(t,\zeta) \in [0,T] \times B_r$ を固定すれば

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in[-r_1,r_1]^n} |\rho_{\mathcal{A}^k\mathcal{B}^k}(x) - \rho_{\mathcal{AB}}(x)| = 0 \tag{14}$$

が成り立つ。よって命題 2 の (b) より

$$\lim_{k\to\infty} \|x(t,\zeta,\rho_{\mathcal{A}^k\mathcal{B}^k}) - x(t,\zeta,\rho_{\mathcal{AB}})\| = 0 \tag{15}$$

さらに (14), (15) 式及び命題 3 の (a) より

$$\lim_{k\to\infty} \rho_{\mathcal{A}^k\mathcal{B}^k}(x(t,\zeta,\rho_{\mathcal{A}^k\mathcal{B}^k})) = \rho_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(x(t,\zeta,\rho_{\mathcal{A}\mathcal{B}})) \tag{16}$$

が成り立つ、ここで $w : \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ は正値連続関数であるので, (15), (16) 式と Lebesgue の有界収束定理 [12] により、写像

$$(\mathcal{A},\mathcal{B}) \in \mathcal{F}_\delta \mapsto \int_{B_r}\int_0^T w(x(t,\zeta,\rho_{\mathcal{A}\mathcal{B}}), \rho_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(x(t,\zeta,\rho_{\mathcal{A}\mathcal{B}})))dtd\zeta$$

はコンパクト距離空間 $\mathcal{F}_\delta$ で連続となる。ゆえに最小値 (最大値) が $\mathcal{F}_\delta$ 上に存在する。

X. まとめ

本研究ではファジィ推論における非ファジィ化計算法の一つである面積法に関して解析を行った。いくつかの証明の結果、面積法は IF-THEN 型ファジィプロダクションルールの前件部変数上の写像として Lipschitz 連続であること、およびメンバシップ関数集合 (ファジィ集合族) 上の汎関数として連続であるという結論が得られた。本研究で得られた Lipschitz 条件は、前件部を構成するファジィ集合のメンバシップ関数に与えた Lipschitz 条件に依存していることが明らかになった。この Lipschitz 条件はフィードバック部にファジィ推論を用いたファジィフィードバック制御の状態方程式の解の一意存在に不可欠である。さらに、汎関数としての連続性はファジィフィードバック制御に最適解を与えるメンバシップ関数対 (ファジィ集合対) の存在性、すなわち IF-THEN 型ファジィプロダクションルールの存在性を保障するものである。これまで扱った高さ法、面積法以外にも、Center of sums method、Center of largest area method、First of maxima method、Max criterion method など [13) 14)]、非ファジィ化計算はいくつか提案されている。今後の課題として、それらの非ファジィ化計算に関する考察を行い、ファジィ制御規則の自動構成のための数理的検証を行うことが重要と考える。

参考文献

1) L. A. Zadeh, Fuzzy algorithms, *Information and Control*, 12, pp.94-102, 1968.

2) E. H. Mamdani, Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant, *Proc. IEE* 121, No. 12, pp.1585-1588, 1974.

3) 水本雅晴, ファジィ制御の改善法 (IV) (代数積-加算-重心法による場合), *Proc. 6th Fuzzy System Symposium*, pp.6-13, 1990.

4) 菅野道夫, ファジィ制御, 日刊工業新聞社, 1988.

5) T. Takagi and M. Sugeno, Fuzzy Identification of Systems and its Applications to Modeling and Control, *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. SMC-15, No. 1, pp.116-132, 1985.

6) 水本雅晴, わかりやすいファジィ理論 III ファジィ推論とファジィ制御ー，コンピュートロール，No. 28，pp.32-45, 1989.

7) 三石貴志，高さ法による非ファジィ化の解析，流通科学大学論集，経済・経営情報編，第 16 巻，第 2 号，pp.19-26，2008.

8) T. Mitsuishi, J. Kawabe, K. Wasaki, Y. Shidama, Optimization of Fuzzy Feedback Control Determined by Product-Sum-Gravity Method. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 1(2), pp.201-211, 2000.

9) Y. Nakamori and M. Ryoke, Identification of fuzzy prediction models through hyperellipsoidal clustering, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, SMC-24, No. 8, pp.1153-1173, 1994.

10) 三石貴志, ファジィ推論のリプシッツ連続性, 流通科学大学論集 人間・社会・自然編, 第 19 巻, 第 3 号, pp.145-156, 2007.

11) R. K. Miller and A. N. Michel, Ordinary Differential Equations, *Academic Press*, New York, 1982.

12) コルモゴロフ，フォミーン，函数解析の基礎, 岩波書店, 1979.

13) H. Hellendoorn and C. Thomas, On Quality Defuzzification -Theory and an Application Example-, *Fuzzy Logic and Its Applications to Engineering, Information Sciences, and Intelligent Systems, Kluwer Academic Publishers*, pp.167-176, Netherlands, 1995.

14) Hung T. Nguyen, Nadipuram R. Prasad, Carol L. Walker and Elbert A. Walker, A First Course Fuzzy and Neural Control, *Chapman & Hall/CRC Press*, Florida, 2003.