

## 資本の不良化と資産価格付け

### — 生産側情報を利用した C-CAPM による考察 —

#### The Effects of Bad Capital Stock on Asset Pricing in C-CAPM

森澤 龍也\*

Tatsuya Morisawa

本稿は、消費に基づく資産価格モデル (C-CAPM) に不良債権や過剰債務の発生を組み込む方法について考察する。ここでは、不良債権および過剰債務の発生を「資本の不良化」ととらえ、生産側情報を利用した C-CAPM にこれを導入することによって、資産価格決定問題を経済理論的に分析する。「資本の不良化」の導入のみでは、資産価格決定に関するパズルは解消されない。

キーワード：不良資本、不良債権、過剰債務、消費に基づく資産価格モデル (C-CAPM)

#### I. はじめに

本稿は、不良債権や過剰債務の発生が実体経済に与える経路について、次のような2つの素朴な問題意識を提示し、この問題について経済理論的に考察する。

通常、消費に基づく資産価格モデル (Consumption-based Capital Asset Pricing Model: 以下、C-CAPM と表記) をはじめとする最適化モデルでは、不良債権や過剰債務の発生は考慮されない。というよりもむしろ、無限視野をもつ代表的家計の効用最大化 (最適貯蓄) モデルにおいて、過剰な貯蓄や資本蓄積が起こる可能性は横断性条件によって排除される。

しかし、資産価格決定において、不良債権や過剰債務の発生は全く影響していないのであろうか。本稿では、不良債権や過剰債務を次のようにとらえることを提示したい。消費主体である家計にとって、不良債権や過剰債務の発生は「保有資産の劣化」が起こることである。また、生産主体である企業にとって、不良債権や過剰債務は「資本の不良化」である。そして、これらは資産価格の価格付けに際して、その価値評価を押し下げる要因になるのではないだろうか、というのが第1の素朴な問題意識である。

これに加えて、過剰債務や不良債権が実体経済に及ぼす経路として、設備投資に至る波及経路はよく議論される<sup>1)</sup>のに対して、消費に至る経路はほとんど議論されない<sup>2)</sup>。マクロ経済における不良債権や過剰債務の発生は、家計の最適貯蓄決定に影響しないだろうか。すなわち、不良債

\*流通科学大学商学部、〒651-2188 神戸市西区学園西町 3-1

(2010年8月26日受理)

©2011 UMDS Research Association

権や過剰債務の発生は、通時的な消費・貯蓄の決定に影響するのではないだろうか、というのが第2の素朴な問題意識である。

そこで本稿では、先の素朴な問題意識に基づき、不良債権や過剰債務の発生を組み込んだC-CAPMの拡張を考察し、計量分析によって実証可能な基本モデルを提示したい。基本的な枠組みとしては、北村・藤木(1997)の「生産側情報を利用したC-CAPM」に基づき、資本の不良化が資産価格に与える影響を分析する。

本稿の構成は次の通りである。第II節では、不良債権および過剰債務の発生をC-CAPMの枠組みに組み込むアイデアとして、資本の不良化についてみていく。第III節では、生産に基づくC-CAPMの枠組みに基づいて分析する。第IV節では、本稿の議論をまとめる。

## II. 資本の不良化について：モデルのアイデア

本節では、C-CAPMに資本の不良化を導入するための基本的なアイデアおよびストーリーを提示する。以下のモデルで用いられる記号は、次の通りである。なお、各変数の下付き添え字 $t$ は、時期を表す。

$C_t$ ：総消費、 $K_t$ ：資本ストック、 $N_t$ ：人口（労働）、 $c_t \equiv C_t/N_t$ ：1人当たり消費、 $k_t \equiv K_t/N_t$ ：1人当たり資本ストック、 $n_t \equiv N_t/N_{t-1}$ ：人口成長率（対前期比）、 $\mu_t (\in [0,1])$ ：不良資本度、 $\tilde{K}_t \equiv (1-\mu_t)K_t$ ：有効資本ストック、 $\tilde{k}_t \equiv \tilde{K}_t/N_t$ ：一人当たり有効資本ストック、 $s_t (\in \{1, 2, \dots, J\})$ ：状態、 $\Omega_t$ ： $t$ 期において利用可能な情報集合、 $\delta$ （定数）：資本減耗率、 $\rho (\in (0, \infty))$ 、定数）：時間選好率、 $\beta \equiv 1/(1+\rho)$  ( $\beta \in (0,1)$ 、定数)：主観的割引率。

### 1. 資本の不良化と生産活動

この経済において、家計は資本( $K_t$ )と労働( $N_t$ )を保有しており、所得のうちの消費( $C_t$ )と貯蓄の割合を決定するものとする。一方、企業は家計から調達した資本( $K_t$ )と労働( $N_t$ )を生産要素として生産活動( $Y_t$ )を行う。

ここで、本稿のモデルが通常モデルと異なる点は、資本の取り扱いにある。企業は当期( $t$ 期)の生産( $Y_t$ )にあたって、前期末( $t-1$ 期末) [=当期初( $t$ 期初)]に家計からレンタルしてきた資本( $K_t$ )を使用する。ストック変数である資本については、 $t$ 期初( $t-1$ 期末)の資本ストックを $K_t$ と表記する。この $K_t$ は $t-1$ 期末に借りた直後に、資本減耗とは別に一定割合 $\mu_t$ (ただし、 $\mu_t \in [0,1]$ )で稼働不良を起こしていることが判明するものとしよう。ただし、一旦レンタルしないことには、どれだけ資本の不良化を起こしているか分からないものとする。換言すれば、家計の保有資産である $K_t$ は、企業が借りて生産を開始するときに $\mu_t K_t$ だけ劣化していることが判明する。要するに、 $K_t$ は $\mu_t K_t$ だけ資本価値が下がった不良資本であることが判明するのである。

そうすると実際に生産に使用可能な資本ストックは、

$$\tilde{K}_t \equiv (1 - \mu_t) K_t \quad (1)$$

と定義される。この資本  $\tilde{K}_t$  を有効資本ストックと呼ぶことにする<sup>3)</sup>。

このモデルにおいて、資本の不良化をどう解釈するかについては、いろいろな考え方があろう。ひとつの解釈は、将来実現する状態（の集合  $s$ ）のうち、資本が有効に稼働する状態とそうでない状態があり、どの状態が実現するかによって、資本の生産に対する有効度（逆にいえば、不良化の度合い）が判明する、というものである。

以上のような資本の不良化が発生するもつで、生産活動は1次同次性を満たす次の生産関数で表されるとしよう。

$$Y_t = F(\tilde{K}_t, N_t) \quad (2)$$

ただし、 $F'_K \equiv \frac{\partial F}{\partial \tilde{K}} > 0$ ,  $F''_{\tilde{K}\tilde{K}} \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{K}^2} < 0$ ,  $F'_N \equiv \frac{\partial F}{\partial N} > 0$ ,  $F''_{NN} \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial N^2} < 0$ 。すなわち、この経済では、

不良化している部分以外の有効資本および労働が投入されることによって、生産物が産出されるものとする。

この生産関数を1人当たりの表示に書き換えた関数は次式で与えられる。

$$y_t = F(\tilde{k}_t, 1) \equiv f(\tilde{k}_t) \quad (3)$$

ただし、 $f'_k \equiv \frac{df}{d\tilde{k}} > 0$ ,  $f''_{kk} \equiv \frac{d^2 f}{d\tilde{k}^2} < 0$ 。  $y_t$  は  $t$  期における1人当たり生産水準 ( $y_t \equiv Y_t/N_t$ ) である。

$\tilde{k}_t$  は  $t$  期における1人当たり有効資本ストックであり、

$$\tilde{k}_t \equiv \frac{\tilde{K}_t}{N_t} = (1 - \mu_t) k_t \quad (4)$$

と表される。  $k_t$  は  $t$  期における1人当たり資本ストック ( $k_t \equiv K_t/N_t$ ) である。

## 2. 状態および状態確率

いま、本稿のモデルにおいて、将来の各状態および状態確率の構造を次のように考える。この経済モデルにおいて、初期は0期とする。将来の各  $t$  期 ( $t \in [1, \infty)$ ) において、 $J$  個の状態 ( $s_t \in \{1, 2, \dots, J\}$ ) が起こりうるとしよう。  $t$  期に状態  $s_t$  が実現した場合に得られうる確率変数  $x_t$  は

$$x_t \equiv x_t(s_t) \quad (5)$$

を意味し、本来は  $x_t(s_t)$  と表記するべきである。ただし本稿では、特に状態  $s_t$  を明記する必要がない限りは、その定式化の表現が煩雑になるのを防ぐために、 $x_t$  と表記する。

$t$  期の各状態  $s_t$  は、 $t$  期初において、生産開始に当たり  $K_t$  が投入され、 $\mu_t$  が判明することによっていずれの状態が実現したか観察できると仮定する。この点を捕捉すると、次のように考えられる。企業は当期 ( $t$  期) の生産 ( $Y_t$ ) にあたって、前期末 ( $t-1$  期末) [=当期初 ( $t$  期初)] に家計から調達した資本 ( $K_t$ ) を使用する。この  $K_t$  は  $t-1$  期末に調達した直後に、資本減耗とは別の

意味で一定割合  $\mu_t(s_t)$  (ただし  $0 \leq \mu_t \leq 1$ ) だけ稼働不良を起こしていることが判明するものとしよう。ただし、一旦調達して手で設置してみないことには、どれだけ資本の不良化を起こしているか分からないものとする。

続いて、将来状態の生起確率を利用可能な情報集合に基づく条件付き確率によって定義しよう。 $h$  期 ( $h \in [0, \infty)$ ) において利用可能な情報集合  $\Omega_h$  の条件のもとで、状態  $s_t \in \{1, 2, \dots, J\}$  が実現する確率を  $\pi_h(s_t)$  と定義する。

$$\pi_h(s_t) \equiv \pi(s_t | \Omega_h) \geq 0, \text{ for } s_t \in [1, J] \text{ and } h \in [0, \infty). \quad (6)$$

ただし、 $\sum_{s_t=1}^J \pi_h(s_t) = 1$  である。すなわち、 $\pi_h(s_t)$  の総和は 1 に等しい。

### 3. 家計と企業の統合

マクロ経済的な観点から、生産物は消費、設備投資に振り分けられる。

$$F(\tilde{K}_t, N_t) = C_t + K_{t+1} - (1 - \delta)\tilde{K}_t \quad (7)$$

ただし、 $C_t$  :  $t$  期における総消費、 $\delta$  : 資本減耗率 (定数)、である。(7) 式第 2 項および第 3 項 ( $K_{t+1} - (1 - \delta)\tilde{K}_t$ ) は  $t$  期の設備投資を表している。資本の不良化が存在していない場合、 $t$  期の設備投資は  $K_{t+1} - (1 - \delta)K_t$  となる。これに対して、本稿のモデルでは、資本の不良化が組み込まれていることを想起されたい。すなわち、この経済では、当期 ( $t$  期) の生産 ( $Y_t$ ) にあたって、 $t-1$  期末 [=  $t$  期初] に調達した資本 ( $K_t$ ) を使用する直後に、不良資本 ( $\mu_t K_t$ ) が判明する。そして  $t$  期中に  $\tilde{K}_t$  は生産に使用されて資本減耗 ( $\delta\tilde{K}_t$ ) する。したがって  $t$  期の設備投資は、 $t$  期末 [=  $t+1$  期初] の資本ストック ( $K_{t+1}$ ) から、不良資本および資本減耗分を除いた  $t$  期中の有効資本ストック ( $(1 - \delta)\tilde{K}_t$ ) を控除した分と定義される。

支出項目の合計式 (7) 式を 1 人当たり表示に変換すると、

$$f(\tilde{k}_t) = c_t + n_{t+1}k_{t+1} - (1 - \delta)\tilde{k}_t \quad (8)$$

となる。ただし、 $c_t$  は  $t$  期における 1 人当たり消費 ( $c_t \equiv C_t / N_t$ )、 $\tilde{k}_t$  は  $t$  期における 1 人当たり有効資本ストック ( $\tilde{k}_t \equiv \tilde{K}_t / N_t$ )、 $n_{t+1}$  は  $t+1$  期の人口成長率 (対前期比:  $n_{t+1} \equiv N_{t+1} / N_t$ )、である。なお、労働 (= 人口)  $N_t$  は各状態  $s_t$  に依存しないものとする。すなわち、

$$N_t(s_t) = N_t \quad \forall s_t \in \{1, 2, \dots, J\} \quad (9)$$

と仮定する。

先述のように、この経済では、家計は労働 ( $N_t$ ) の供給者であり、資本 ( $K_t$ ) の保有者である。企業は家計から供給された資本 ( $K_t$ ) と労働 ( $N_t$ ) を生産要素として生産活動 ( $Y_t$ ) に投入する。換言すれば、企業は資本保有を通じて家計によって所有されている。実際、先の支出項目の合計式 (7) 式を

$$K_{t+1} = (1 - \delta)\tilde{K}_t + F(\tilde{K}_t, N_t) - C_t \quad (10)$$

と書き換えると、その意味（企業が家計の擬制であるという性質）はより明示的なものになる。

(10) 式は  $t$  期末 (=  $t+1$  期初) における資本市場の需給均衡関係を表している。(10) 式左辺は企業からの資本需要を表す。他方、(10) 式右辺は家計による資本供給を表しており、その原資は企業から  $t$  期の生産後に一旦返却された資本（右辺第 1 項：資本不良化分および資本減耗分の控除後資本）および  $t$  期の貯蓄（右辺第 2 項および第 3 項：消費されなかった残りの財）である。

(10) 式右辺第 2 項および第 3 項の経済学的意味について、捕足しておこう。生産関数は 1 次同次性を満たすと仮定されているので、同次関数に関するオイラーの定理および限界生産力原理のもとで、生産物  $F(\tilde{K}_t, N_t)$  は労働（の供給者）および資本（の保有者）に完全分配される<sup>4)</sup>。このモデルでは家計が労働供給者および資本保有者であり、生産物  $F(\tilde{K}_t, N_t)$  は家計に完全分配される。よって、 $F(\tilde{K}_t, N_t) - C_t$  は家計によって  $t$  期に消費されなかった残りの財を表し、これが次期の資本供給に回されるのである。

このことから分かるように、この経済において、企業は、資本保有者である家計の予算制約式に取り込まれているという意味で、家計の擬制であり、「生産技術を体現しているだけで何か組織的な実体があるわけではない」<sup>5)</sup>。つまり、家計は予算制約式を通じて企業の行動を織り込みながら、消費および貯蓄の意思決定を行っているのである<sup>6)</sup>。

### III. 資本の不良化を組み込んだ C-CAPM

本節では、前節での設定に基づき、資本の不良化を組み込んだ C-CAPM を提示する。基本的な枠組みとしては、北村・藤木 (1997) の「生産側情報を利用した C-CAPM」に基づき、資本の不良化が資産価格に与える影響を分析していく。

#### 1. 代表的家計の最適化問題

第 II 節での設定に基づき、家計と企業の行動を統合して、代表的家計モデルの枠組みのもとで、資産価格の決定問題を考察しよう。すなわち、予算制約のもとで、代表的家計は現在 (0 期) から将来にかけての消費から得られる期待効用の割引現在価値が最大になるように消費と資産を選択する、としよう。これを定式化すると、次の数学的問題になる<sup>7)</sup>。

$$\begin{aligned} \max_{c_t, \tilde{k}_{t+1}} \quad & u(c_0) + \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{s_t=1}^J \beta^t \cdot u(c_t(s_t)) \cdot \pi_0(s_t) \\ \text{subject to} \quad & f(\tilde{k}_t(s_t)) = c_t(s_t) + n_{t+1} \cdot k_{t+1}(s_{t+1}) - (1-\delta) \cdot \tilde{k}_t(s_t) \quad (8) \\ & \tilde{k}_t(s_t) = (1 - \mu_t(s_t)) \cdot k_t(s_t) \quad (4) \end{aligned}$$

ただし、 $u(\cdot)$ ：時点 [即時] 効用関数 [ただし、 $u'(c_t) \equiv du(c_t)/dc_t > 0$ ,  $u''(c_t) \equiv d^2u(c_t)/(dc_t)^2 < 0$ ,  $u'''(c_t) \equiv d^3u(c_t)/(dc_t)^3 > 0$ ]、 $\rho$ ：時間選好率 (定数、 $\rho \in (0, \infty)$ )、 $\beta = 1/(1+\rho)$ ：主観的割引率 (定数、 $\beta \in (0, 1)$ )、である。

この問題を解くためのラグランジュ関数は次のように設定される。

$$L = u(c_0) + \lambda_0 \left( f(\tilde{k}_0) - c_0 - n_1 \cdot k_1 + (1 - \delta) \cdot \tilde{k}_0 \right) + \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{s_t=1}^J \beta^t \left[ u(c_t(s_t)) + \lambda_t \left( f(\tilde{k}_t(s_t)) - c_t(s_t) - n_{t+1} \cdot k_{t+1}(s_{t+1}) + (1 - \delta) \cdot \tilde{k}_t(s_t) \right) \right] \pi_0(s_t) \quad (11)$$

ただし、 $\{\lambda_t\}_{t=0}^{\infty}$  はラグランジュ乗数の系列である。

このとき、最大化のための一階の条件は以下のようになる。

$$c_t(s_t): u'(c_t(s_t)) - \lambda_t = 0 \quad \text{for } t \in [0, \infty) \text{ and } s_t \in \{1, 2, \dots, J\} \quad (12)$$

$$k_{t+1}(s_{t+1}): \lambda_t \cdot n_{t+1} \cdot \pi_t(s_t) - \beta \cdot \lambda_{t+1} \cdot (1 - \mu_{t+1}(s_{t+1})) \left( 1 + f'(\tilde{k}_{t+1}(s_{t+1})) - \delta \right) \cdot \pi_t(s_{t+1}) = 0 \quad (13) \\ \text{for } t \in [0, \infty) \text{ and } s_t, s_{t+1} \in \{1, 2, \dots, J\}$$

(13) 式に (12) 式を代入して整理すると、

$$\beta \cdot \frac{u'(c_{t+1}(s_{t+1}))}{u'(c_t(s_{t+1}))} \cdot (1 - \mu_{t+1}(s_{t+1})) \left( 1 + f'(\tilde{k}_{t+1}(s_{t+1})) - \delta \right) \cdot \pi_t(s_{t+1}) - n_{t+1} \cdot \pi_t(s_t) = 0 \quad (14) \\ \text{for } t \in [0, \infty) \text{ and } s_t, s_{t+1} \in \{1, 2, \dots, J\}$$

が得られる<sup>8)</sup>。

(14) 式の期待値をとると、

$$\beta \sum_{s_{t+1}=1}^J \frac{u'(c_{t+1}(s_{t+1}))}{u'(c_t(s_{t+1}))} \cdot (1 - \mu_{t+1}(s_{t+1})) \left( 1 + f'(\tilde{k}_{t+1}(s_{t+1})) - \delta \right) \cdot \pi_t(s_{t+1}) - n_{t+1} = 0 \quad (15) \\ \text{for } t \in [0, \infty)$$

が成立する。(15) 式はオイラー方程式と呼ばれる関係であり、均衡資産収益率の決定式である。

ここで、確率変数  $x_t$  に関する条件付き期待値オペレータを

$$E_h \{ x_t | \Omega_h \} \equiv \sum_{s_{t+j}=1}^J x_t(s_{t+j}) \cdot \pi_h(s_{t+j}) \quad \text{for } t \in [1, \infty), j \in [0, \infty), \text{ and } h \in [0, \infty) \quad (16)$$

と定義すると、オイラー方程式 (15) 式は

$$E_t \left\{ \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \cdot (1 - \mu_{t+1}) \left( 1 + f'(\tilde{k}_{t+1}) - \delta \right) - n_{t+1} \middle| \Omega_t \right\} = 0 \quad \text{for } t \in [0, \infty) \quad (17)$$

と表すことができる。

## 2. 実質利子率の決定メカニズム

定常均衡のもとで、人口は一定 ( $n_{t+1} = 1$ ) であり、均衡実質利子率  $r_{t+1}$  は、

$$r_{t+1} = f'(\tilde{k}_{t+1}) - \delta \quad \text{for } t \in [0, \infty) \quad (18)$$

となる<sup>9)</sup>。したがって、前節で導出されたオイラー方程式 (15) 式は、

$$\beta \sum_{s_{t+1}=1}^J \frac{u'(c_{t+1}(s_{t+1}))}{u'(c_t(s_{t+1}))} \cdot (1 - \mu_{t+1}(s_{t+1})) (1 + r_{t+1}(s_{t+1})) \cdot \pi_t(s_{t+1}) - 1 = 0 \quad (19)$$

for  $t \in [0, \infty)$

と表され、期待値オペレータ表現のオイラー方程式 (17) 式は、

$$E_t \left\{ \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \cdot (1 - \mu_{t+1})(1 + r_{t+1}) - 1 \middle| \Omega_t \right\} = 0 \quad \text{for } t \in [0, \infty) \quad (20)$$

と表される。

このオイラー方程式から、テイラー展開を行うことによって、実質利子率の決定式を導出しよう。まず、そのための準備として、オイラー方程式について、次のような関係を定義する。

$$\begin{aligned} & v(c_{t+1}(s_{t+1}), \mu_{t+1}(s_{t+1}), r_{t+1}(s_{t+1}), \rho) \\ & \equiv \frac{1}{1 + \rho} \frac{u'(c_{t+1}(s_{t+1}))}{u'(c_t(s_{t+1}))} \cdot (1 - \mu_{t+1}(s_{t+1})) (1 + r_{t+1}(s_{t+1})) \cdot \pi_t(s_{t+1}) \end{aligned} \quad (21)$$

for  $t \in [0, \infty)$  and  $s_{t+1} \in \{1, 2, \dots, J\}$

ちなみに、(21) 式について期待値をとった式は、オイラー方程式 (19) 式と同値になる。よって、(19) 式と (21) 式より、

$$\sum_{s_{t+1}=1}^J v(c_{t+1}(s_{t+1}), \mu_{t+1}(s_{t+1}), r_{t+1}(s_{t+1}), \rho) = 1 \quad \text{for } t \in [0, \infty) \quad (22)$$

という関係が成り立つ。

(21)式を  $c_{t+1}, \mu_{t+1}, r_{t+1}, \rho$  についてテイラー展開すると、次のような近似式を得ることができる<sup>10)</sup>。

$$\begin{aligned} & v(c_{t+1}(s_{t+1}), \mu_{t+1}(s_{t+1}), r_{t+1}(s_{t+1}), \rho) \\ & \equiv \pi_t(s_{t+1}) \left\{ 1 + r_{t+1}(s_{t+1}) - \rho - \mu_{t+1}(s_{t+1}) + \frac{u''(c_t(s_{t+1}))}{u'(c_t(s_{t+1}))} (c_{t+1}(s_{t+1}) - c_t(s_{t+1})) \right. \\ & \quad \left. + \frac{u'''(c_t(s_{t+1}))}{u'(c_t(s_{t+1}))} \frac{(c_{t+1}(s_{t+1}) - c_t(s_{t+1}))^2}{2} \right\} \quad \text{for } t \in [0, \infty) \text{ and } s_{t+1} \in [1, J] \end{aligned} \quad (23)$$

(23) 式について期待値をとると、

$$\begin{aligned}
& \sum_{s_{t+1}=1}^J v(c_{t+1}(s_{t+1}), \mu_{t+1}(s_{t+1}), r_{t+1}(s_{t+1}), \rho) \\
& \equiv \sum_{s_{t+1}}^J \pi_t(s_{t+1}) \left\{ 1 + r_{t+1}(s_{t+1}) - \rho - \mu_{t+1}(s_{t+1}) + \frac{u''(c_t(s_{t+1}))}{u'(c_t(s_{t+1}))} (c_{t+1}(s_{t+1}) - c_t(s_{t+1})) \right. \\
& \quad \left. + \frac{u'''(c_t(s_{t+1}))}{u'(c_t(s_{t+1}))} \frac{(c_{t+1}(s_{t+1}) - c_t(s_{t+1}))^2}{2} \right\} \\
& = 1 - \rho + \sum_{s_{t+1}}^J \pi_t(s_{t+1}) \left\{ r_{t+1}(s_{t+1}) - \mu_{t+1}(s_{t+1}) + \frac{u''(c_t(s_{t+1}))}{u'(c_t(s_{t+1}))} (c_{t+1}(s_{t+1}) - c_t(s_{t+1})) \right. \\
& \quad \left. + \frac{u'''(c_t(s_{t+1}))}{u'(c_t(s_{t+1}))} \frac{(c_{t+1}(s_{t+1}) - c_t(s_{t+1}))^2}{2} \right\} \quad \text{for } t \in [0, \infty)
\end{aligned} \tag{24}$$

となる。(22) 式と (24) 式より、

$$\begin{aligned}
1 - \rho + \sum_{s_{t+1}}^J \pi_t(s_{t+1}) \left\{ r_{t+1}(s_{t+1}) - \mu_{t+1}(s_{t+1}) + \frac{u''(c_t(s_{t+1}))}{u'(c_t(s_{t+1}))} (c_{t+1}(s_{t+1}) - c_t(s_{t+1})) \right. \\
\left. + \frac{u'''(c_t(s_{t+1}))}{u'(c_t(s_{t+1}))} \frac{(c_{t+1}(s_{t+1}) - c_t(s_{t+1}))^2}{2} \right\} \cong 1 \quad \text{for } t \in [0, \infty)
\end{aligned} \tag{25}$$

となる。

ここで、確率変数  $x_t$  に関する条件付き分散オペレータを

$$\begin{aligned}
\text{Var}_h \{x_t | \Omega_h\} & \equiv \sum_{s_{t+j}=1}^J (x_t(s_{t+j}) - E_h \{x_t | \Omega_h\}) \pi_h(s_{t+j}) \\
& \quad \text{for } t \in [1, \infty), j \in [0, \infty), \text{ and } h \in [0, \infty)
\end{aligned} \tag{26}$$

と定義する。

(25) 式を期待実質利子率について整理し、さらに期待値オペレータ (16) 式、および分散オペレータ (26) 式を用いると、

$$\begin{aligned}
E_t(r_{t+1} | \Omega_t) & \equiv \rho + E_t(\mu_{t+1} | \Omega_t) + \gamma_t \cdot E_t \left( \frac{c_{t+1} - c_t}{c_t} \middle| \Omega_t \right) \\
& \quad - \frac{\varepsilon_t \cdot \gamma_t}{2} \cdot \text{Var}_t \left( \frac{c_{t+1} - c_t}{c_t} \middle| \Omega_t \right) \quad \text{for } t \in [0, \infty)
\end{aligned} \tag{27}$$

という関係が成り立つ<sup>11)</sup>。ただし、

$$\gamma_t \equiv - \frac{u''(c_t) \cdot c_t}{u'(c_t)} \tag{28}$$

$$\varepsilon_t \equiv - \frac{u'''(c_t) \cdot c_t}{u''(c_t)} \tag{29}$$



である。 $\gamma_t$ は相対的危険回避度 (relative risk aversion)、 $\varepsilon_t$ は相対的ブルーデンス (relative prudence) と呼ばれている。相対的危険回避度は限界効用の歪曲度合 (curvature) と消費水準の積を限界効用で標準化したものであり、効用関数の上方への張り出し方によって消費者の危険回避度を表したものである<sup>12)</sup>。相対的ブルーデンスは、将来の消費変動に備える予備的貯蓄 (precautionary saving) が効用関数の3階微分に反映されることを示している<sup>13)</sup>。すなわち、限界効用の歪曲度が高まり、将来への慎重さ (ブルーデンス) の度合いが大きくなるほど、不確実性に備えて消費を先延ばしするという予備的貯蓄動機が高まるということを表す指標である。

(27) 式より、定常均衡における期待実質利子率は、消費成長率の平均および分散、期待不良資本度、並びに、消費者の選好パラメータ (時間選好率、相対的危険回避度、相対的ブルーデンス) といった各要因によって説明されることがわかる。

### 3. CRRA 型効用関数に特定化した場合：依然として解けぬパズル

ここで、時点効用関数を相対的危険回避度一定 (Constant Relative Risk Aversion: 以下では、CRRA と表記) 型効用関数と呼ばれる次式に特定化しよう。

$$u(c_t) = \begin{cases} \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} & \text{for } \gamma > 0 \text{ and } \gamma \neq 1 \\ \log c_t & \text{for } \gamma = 1 \end{cases} \quad (30)$$

ただし、パラメータ  $\gamma$  は定数である。

この効用関数のもとでは、相対的危険回避度  $\gamma_t$  と相対的ブルーデンス  $\varepsilon_t$  は、(28) 式、(29) 式、および (30) 式より、

$$\gamma_t = \gamma > 0 \text{ (const.)} \quad (31)$$

$$\varepsilon_t = 1 + \gamma > 1 \text{ (const.)} \quad (32)$$

となる。(31) 式および (32) 式で表されているように、CRRA 型効用関数 (30) 式のもとでは、相対的危険回避度および相対的ブルーデンスは定数となることがわかる。

時点効用関数を CRRA 型効用関数 (30) 式に特定化した場合、オイラー方程式 (20) 式は、

$$E_t \left\{ \beta \left( \frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\gamma} (1 - \mu_{t+1})(1 + r_{t+1}) - 1 \middle| \Omega_t \right\} = 0 \quad \text{for } t \in [0, \infty) \quad (33)$$

となる。オイラー方程式 (33) 式のテイラー展開式である期待実質利子率の決定式は、(27) 式および (30) 式より、

$$E_t(r_{t+1}|\Omega_t) \cong \rho + E_t(\mu_{t+1}|\Omega_t) + \gamma \cdot E_t\left(\frac{c_{t+1}-c_t}{c_t} \middle| \Omega_t\right) - \frac{\gamma(1+\gamma)}{2} \cdot \text{Var}_t\left(\frac{c_{t+1}-c_t}{c_t} \middle| \Omega_t\right) \quad \text{for } t \in [0, \infty) \quad (34)$$

となる。

資本の不良化を考慮しなければ ( $\mu_t=0$ )、(34) 式において  $E_t(\mu_{t+1}|\Omega_t) = 0$  となるので、次式が成り立つ。

$$E_t(r_{t+1}|\Omega_t) \cong \rho + \gamma \cdot E_t\left(\frac{c_{t+1}-c_t}{c_t} \middle| \Omega_t\right) - \frac{\gamma(1+\gamma)}{2} \cdot \text{Var}_t\left(\frac{c_{t+1}-c_t}{c_t} \middle| \Omega_t\right) \quad \text{for } t \in [0, \infty) \quad (35)$$

(35) 式については、米国において現実に観察される非常に低い平均実質利子率、および、非常に高いリスク・プレミアム（安全利子率とマーケット・ポートフォリオ収益率との平均超過収益率）を説明することができない、ということが知られている。前者は、安全利子率パズル (risk-free rate puzzle)、後者は、マーラー=プレスコット・パズル [Mehra and Prescott (1985)]、ないし、リスク・プレミアム・パズル、と呼ばれている<sup>14)</sup>。一方、(34) 式では、通常モデルに  $E_t(\mu_{t+1}|\Omega_t)$  が加わったのみである。すなわち、パズルの解消のためには、 $\rho$  および  $E_t(\mu_{t+1}|\Omega_t)$  に強い負の値を想定する必要がある。(34) 式の実質利子率の決定式においても、依然として、安全利子率パズルおよびリスク・プレミアム・パズルは解消されていない。この点については、モデル再考の余地が残されている。

#### IV. おわりに

本稿では、生産側情報を利用した C-CAPM に「資本の不良化」を導入することによって、不良債権や過剰債務の発生を組み込んだ C-CAPM の拡張を考察した。

最初に提示した素朴な疑問に関して、ここでは、不良資本度  $\mu_t$  を導入することによって、資産価格付けにおける不良債権・過剰債務発生の影響を表した。さらに、この  $\mu_t$  がオイラー方程式に組み込まれることによって、不良債権・過剰債務の発生が最適貯蓄決定に対して影響していることが伺える。

最後に、残された課題について指摘しておきたい。第1に、あくまでも実証可能な基本モデルの提示にとどまり、実際のデータによって計量分析を行っていない点である。また、実証分析に当たり、不良資本度の指標についても適切に選択される必要がある。第2に、(34) 式の実質利子率の決定式によっても、依然として、安全利子率パズルおよびリスク・プレミアム・パズルが解消されていない点である。すなわち、不良資本度  $\mu_t$  を加えたのみでは資産価格決定に関するパズ

ルを根本的に解決したことになるのである。本稿の分析は不良債権および過剰債務を C-CAPM に組み込む方法、および、その基本モデルを提示することに留まっている。以上の課題については、稿を改めて取り組むことにしたい。

#### 引用文献、注

- 1) 例えば、設備投資関数に不良債権や過剰債務を考慮した研究に、小川（2003）や永幡・関根（2002）などがある。
- 2) 脇田（2007a、2008）は、不良債権の所得・消費ルートについて議論している。
- 3) 本稿のように有効資本を定義している先行研究に脇田（2007a）がある。ただし、脇田（2007a）は  $\mu_t$  を単に「過剰融資、あるいは不良債権比率」ととらえているのに対して、本稿では生産側情報に基づく C-CAPM に不良債権・過剰債務を組み込むという意図のもとで、本節で展開しているような「資本の不良化」というアイデアを提示している。
- 4) 「利潤ゼロの長期均衡」を想定できる状況では、生産関数の 1 次同次性（および、オイラーの定理）を考慮せずに、利潤ゼロの関係および限界生産力原理によって「生産物の完全分配」が成り立つ。例えば、熊谷（1983）、第 10 章、p.191 を参照されたい。
- 5) 齊藤（2006）、p.6 より引用した。
- 6) ただし、本稿における企業は、不良資本化を判別できる存在という意味で、通常の新古典派モデルで想定されている企業像よりも、家計とは独立の存在意義をもっているともいえる。本稿のモデルはその意味で、通常の新古典派モデルよりも若干ながら家計擬制度が低いといえる。
- 7) 第 II 節までは、表記の煩雑化を避けるために、状態  $s_t$  ごとの確率変数  $x$  を  $x_t(s_t)$  と表記せず、簡略化した  $x_t$  で表記していた。本節では、期待効用の最適化モデルを分析するため、特に状態  $s_t$  を明記した  $x_t(s_t)$  で確率変数  $x$  を表記する。
- 8) (14) 式については、一階の条件 (12) 式と、 $s_t, s_{t+1} \in \{1, 2, \dots, J\}$  より、

$$u'(c_t(s_t)) = u'(c_t(s_{t+1})) = \lambda_t$$

が成立することを利用している。上記の関係より、第 1 項の分数部分の分母は

$$\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} = \frac{u'(c_{t+1}(s_{t+1}))}{u'(c_t(s_t))} = \frac{u'(c_{t+1}(s_{t+1}))}{u'(c_t(s_{t+1}))}$$

となる。この後で一階の条件を整理した (14) 式について期待値を計算する都合上、上式のように

$$\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} = \frac{u'(c_{t+1}(s_{t+1}))}{u'(c_t(s_{t+1}))}$$

と表記する。

- 9) Barro and Sala-i-Martin（1995）, ch.2, § 2.2 を参照されたい。
- 10) (23) 式の導出にあたって、 $\mu_{t+1}, r_{t+1}, \rho$  については原点周りで 1 次の展開を行い、 $c_{t+1}$  については  $c_t$  の周りで 2 次の展開を行っている。なお、この導出にあたって、齊藤（2006）、第 3 章における導出過程を参考にしている。

11) (27) 式の右辺第 4 項については、齊藤 (2006) と同様、 $\left[ E_t \left( \frac{c_{t+1} - c_t}{c_t} \middle| \Omega_t \right) \right]^2 \cong 0$  と仮定して、

$E_t \left[ \left( \frac{c_{t+1} - c_t}{c_t} \right)^2 \middle| \Omega_t \right]$  を  $Var_t \left( \frac{c_{t+1} - c_t}{c_t} \middle| \Omega_t \right)$  に置き換えている。齊藤 (2006)、p.124、脚注 15 を参照されたい。

12) 相対的危険回避度に関する詳細は、齊藤 (2006)、§ 3.6.1 を参照されたい。

13) 相対的プルーデンスに関する詳細は、Kimball (1990)、および、齊藤 (2006)、§ 3.6.4 を参照されたい。

14) 安全利子率パズル、および、リスク・プレミアム・パズルに関する詳細は、齊藤 (2006)、§ 3.5.8 および § 3.5.9 を参照されたい。

#### 参考文献

- 1 小川一夫 (2003)、『大不況の経済分析』、日本経済新聞社。
- 2 北村行伸・藤木裕 (1997)、「サプライ・サイド情報を利用した消費に基づく資本資産価格モデルの推計」、『金融研究』(日本銀行金融研究所)、第 16 巻第 4 号、pp.137-154。
- 3 熊谷尚夫 (1983)、『経済原論』、岩波書店。
- 4 齊藤誠 (2006)、『新しいマクロ経済学 (新版)』、有斐閣。
- 5 永幡崇・関根敏隆 (2002)、「設備投資、金融政策、資産価格—個別企業データを用いた実証分析—」、日本銀行調査統計局ワーキングペーパー、No.2002-3。
- 6 脇田成 (2007a)、「不良債権処理のマクロ的インパクト—失われた 10 年第三の仮説」、景気日付研究会沼津コンファレンス発表論文。
- 7 脇田成 (2007b)、「Dual TFP と不良債権—資本収益率低下のコスト— (失われた 10 年 第三の仮説 2)」景気循環日付検討研究会彦根コンファレンス発表論文。
- 8 脇田成 (2008)、『日本経済のパースペクティブ』、有斐閣。
- 9 Barro, R. J. and X. Sala-i-Martin (1995), *Economic Growth*, McGraw-Hill. [(邦訳) 大住圭介訳 (1997) 『内生的経済成長論 I』、(1998) 『内生的経済成長論 II』、九州大学出版会。]
- 10 Kimball, M. S. (1990), "Precautionary Saving in the Small and in the Large," *Econometrica* 58, pp.53-73.
- 11 Mehra, R. and E. C. Prescott (1985), "The Equity Premium: A Puzzle," *Journal of Monetary Economics* 15, pp.145-161.