流通科学大学論集－経済・経営情報編－第16巻第２号, 19－26（2008）

高さ法による非ファジィ化の解析

Analysis of Defuzzification by Height Method

三石 貴志 †
Takashi Mitsuishi

本研究は、ファジィ制御に用いられる推論計算の一部である非ファジィ化に関して考察を行っている。非ファジィ化法の一つ、高さ法を状態変数空間上の関数もしくはメンバシップ関数集合上の関数とみなし、それぞれに対し連続性が証明できた。

キーワード： ファジィ推論、非ファジィ化、高さ法

I. はじめに

Zadeh [1] は、通常の集合の概念を拡張したファジィ集合を提案し、人間の言語が持つ曖昧さを定量的に扱うことを可能とするファジィ理論を構築した。このファジィ理論は様々な分野に応用されており、その主たるものは Mamdani [2] が初めて適用した制御工学分野である。以後、ファジィ制御として 1990 年代に家電を中心としたファジィブームを経て広く浸透し、人工知能分野の一つとして応用範囲は多岐にわたっている。これは、ファジィ制御が単なるパターンマッチングの制御と異なりヒューリスティックな制御であるということや、制御規則はエキスパートの経験則が反映され易く設計において多くの知識を要しないからであるといえる。現在、洗濯機から地下鉄まで様々な制御対象はあるものの、設計方法は開発者に依存しており現代制御や古典制御のように体系立てられた理論構築はいまだなされていない。すなわち、数理的考察が不十分であるということである。したがって、本論文ではファジィ制御の実制御への適用に関してではなく、ファジィ制御の推論計算の数学的な解析に関して述べている。

筆者はこれまで Mamdani Method や Product-Sum 重心法を用いたファジィ推論法について最適制御に関する解析を行ってきた [3] [4]。これらの推論法は重心法で非ファジィ化を行う。この重心法は、推論結果のファジィ集合から重心をとり、その値を代表値とするものであり最も多く採用されている方法である。しかしながら、推論過程の最後に重心法を用いてファジィ値からクリスプ値に変換するこれらの推論法は、その前段でファジィ集合の合成を行う。本研究で用いる

† 流通科学大学情報学部、〒651－2188 神戸市西区学園西町３－１

（2007年８月28日受理）

高さ法は後件部のファジィ集合の合成を行なわない計算法であることから Mamdani Method や Product-Sum 重心法を用いた場合より計算速度が速くなるというメリットがある。ファジィ推論とは、IF-THEN 型ファジィプロダクションルールへ前件部変数なる制御対象の状態変数値が与えられたとき、制御対象への入力値を求める計算法である。高さ法について本研究では 2 種類の連続性について解析を行った。1 つは状態変数（前件部変数）を変数としたリプシッツ連続であり、他方は IF-THEN 型ファジィプロダクションルールを構成するファジィ集合 (メンバシップ関数) を変数とした汎関数としての連続性である。ここで、汎関数とは関数空間の上で定義された関数のことである。前者のリプシッツ条件は常微分方程式の解の一意存在の十分条件であることから、本研究により得られた高さ法を用いたファジィ推論のリプシッツ連続性は制御対象の状態方程式の解の一意存在を保証する有用な道具となりうると考える。例えば師玉 [5]、楊 [6] らの研究における状態方程式の解の一意存在性に適応が可能である。後者の汎関数としての連続性はファジィ制御の最適化問題に適応が可能であり、最適解を与える IF-THEN 型ファジィプロダクションルールの存在条件の一つとなり得る。

II.　IF-THEN 型ファジィプロダクションルール

本論文では以下の IF-THEN 型ファジィプロダクションルール上の推論法に関する考察を述べる。

$$
\begin{gathered}
\text{RULE 1: } IF\ x_1\ is\ A_{11}\ and\ \ldots\ and\ x_j\ is\ A_{1j}\ and\ \ldots\ and\ x_n\ is\ A_{1n} \\
THEN\ y\ is\ B_1 \\
\vdots \\
\text{RULE } i\text{: } IF\ x_1\ is\ A_{i1}\ and\ \ldots\ and\ x_j\ is\ A_{ij}\ and\ \ldots\ and\ x_n\ is\ A_{in} \\
THEN\ y\ is\ B_i \\
\vdots \\
\text{RULE } m\text{: } IF\ x_1\ is\ A_{m1}\ and\ \ldots\ and\ x_j\ is\ A_{mj}\ and\ \ldots\ and\ x_n\ is\ A_{mn} \\
THEN\ y\ is\ B_m
\end{gathered}
\tag{1}
$$

ここで、m は IF-THEN 型ファジィプロダクションルールの数を表し、$x_j \in [-r_1, r_1]$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$、$y \in [-r_2, r_2]$ はそれぞれ前件部、後件部変数である。ただし r_1, r_2 は任意の正定数とする。本研究ではファジィ集合 A_{ij} のメンバシップ関数 $\mu_{A_{ij}}$ およびファジィ集合 B_i のメンバシップ関数 μ_{B_i} はそれぞれ次に示すメンバシップ関数集合 $F_{\Delta_{ij}}$、G に属すると仮定する。

$$
\begin{aligned}
F_{\Delta_{ij}} = \{\mu \in C[-r_1, r_1] : \forall x \in [-r_1, r_1]\ 0 \le \mu(x) \le 1, \\
\forall x, x' \in [-r_1, r_1]\ |\mu(x) - \mu(x')| \le \Delta_{ij}|x - x'|\}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$
G = \{\mu \in L^2[-r_2, r_2] : 0 \le \mu(x) \le 1 \text{ a.e. } x \in [-r_2, r_2]\}
\tag{3}
$$

$L^2[-r_2, r_2]$ は区間 $[-r_2, r_2]$ における 2 乗可積分、すなわち $\int_{-r_2}^{r_2} |\mu(x)|^2 dx < \infty$ である関数空間、また、$C[-r_1, r_1]$ は連続関数空間とし、$\Delta_{ij} > 0$ をリプシッツ定数とする。このとき、メンバシップ関数全体の集合は以下の直積集合

$$\mathcal{F} = \prod_{i=1}^{m} \left\{ \prod_{j=1}^{n} F_{\Delta_{ij}} \right\} \times G^m \tag{4}$$

で表すことができる。表現を簡単にするために、前件部と後件部のメンバシップ関数の多重対をそれぞれ以下のように表す。

$$\mathcal{A}_i = (\mu_{A_{i1}}, \ldots, \mu_{A_{in}}) \quad (i = 1, \ldots, m), \quad \mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m), \quad \mathcal{B} = (\mu_{B_1}, \ldots, \mu_{B_m}).$$

さらに、前件部変数ベクトルを $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ とおく。ファジィ制御において通常用いられるメンバシップ関数は実数空間上で定義された三角型、台形型、釣鐘型、Z 型および S 型などである。メンバシップ関数の台集合である閉区間 $[-r_1, r_1]$, $[-r_2, r_2]$ を十分大きくとることにより実用上ほとんどのメンバシップ関数が式 (2)、(3) で定義された集合に含まれる。したがって、これらの設定は通常行われるファジィ制御の一般化であるから以後展開される議論はほとんどの分野にて適用可能であると考える。

III. ファジィ推論法

(1) で示されたファジィ規則に前件部変数の確定値 (制御対象の出力値)$x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in [-r_1, r_1]^n$ が与えられたとき、推論結果の確定値 (制御対象への入力値) を計算する方法は、これまでいくつか提案されており、その中で代表されるものは Mamdani Method で、Mamdani がファジィ制御として最初に提案した方法である。推論方法は以下の 4 段階に分かれている。

(過程 1) 与えられた状態変数の確定値に対して前件部の適合度を求める。

(過程 2) 前件部の適合度を後件部のメンバシップ関数に反映させ各ルールの推論結果を求める。

(過程 3) 各ルールの推論結果を統合してルール全体の推論結果を求める。

(過程 4) ルール全体の推論結果はメンバシップ関数であるので制御対象へ確定値を出力するために重心法による非ファジィ化を行う。

Mamdani Methd は推論過程において計算に min、max 演算を用いている。これらの演算の非線形性により、各ルールの適合度、推論結果等の値のスムースな変化が得られない。その上、推論過程が直感的ではない。以上の理由から、Mamdani Methd のすべての計算において、min 演算を代数積（掛算）に、max 演算を加算（足し算）に変更した Product-Sum 重心法が水本により提案された [7]。水本の報告によると、推論法として Mamdani Methd を用いた場合より良好な制御結果が得られたとされている。

本研究では、高さ法を用いた非ファジィ化の計算法の性質について考察する。一般的に高さ法を用いた推論の場合、過程 1,2 は Mamdani Methd や Product-Sum 重心法の計算方法同様、min

演算や代数積を採用する。過程 3,4 については、ファジィ集合で表された各ルールの推論結果を統合する前に各ルールの後件部のファジィ集合の代表値を重心法により求める。そして非ファジィ化の高さ法は、代表値を前件部の適合度にて重み付けし平均値として計算するものである。以下、計算過程を示す。

(過程 1) 第 i 番目のルールの前件部の適合度 $\alpha_{\mathcal{A}_i}(x^*)$ を求める。

$$\alpha_{\mathcal{A}_i}(x^*) = \bigwedge_{j=1}^{n} \mu_{A_{ij}}(x_j^*) \text{ または } \alpha_{\mathcal{A}_i}(x^*) = \prod_{j=1}^{n} \mu_{A_{ij}}(x_j^*) \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

(過程 2) 第 i 番目のルールの推論結果を求める。

$$\beta_{\mathcal{A}_i B_i}(x^*, y) = \alpha_{\mathcal{A}_i}(x^*) \wedge \mu_{B_i}(y) \text{ または } \beta_{\mathcal{A}_i B_i}(x^*, y) = \alpha_{\mathcal{A}_i}(x^*)\mu_{B_i}(y) \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

(過程 3) 第 i 番目のルールの推論結果のクリスプな代表値を重心法により求める。

$$\gamma_{\mathcal{A}B_i}(x^*) = \frac{\int_{-r_2}^{r_2} y\beta_{\mathcal{A}_i B_i}(x^*, y)dy}{\int_{-r_2}^{r_2} \beta_{\mathcal{A}_i B_i}(x^*, y)dy} \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

(過程 4) ファジィルール全体における推論結果を高さ法により求める (非ファジィ化)。

$$\rho_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(x^*) = \frac{\sum_{i=1}^{m} \alpha_{\mathcal{A}_i}(x^*)\gamma_{\mathcal{A}B_i}(x^*)}{\sum_{i=1}^{m} \alpha_{\mathcal{A}_i}(x^*)}$$

他に後件部を定数とした簡略推論法 [8] や簡略推論法を一般化した関数型推論法 [9] が紹介されているが本論文では扱わない。各過程において、関数 α, β, γ, ρ に添え字としてメンバシップ関数の多重対 $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ を付した。これはそれぞれの計算式および値が前件部変数だけでなくメンバシップ関数にも依存していることを明示するためである。ただし、β および γ の添え字 B_i はメンバシップ関数 μ_{B_i} である。

IV.　メンバシップ関数集合への条件付け

前節の計算過程の重心法および非ファジィ化において分数式が現れる。これらの分母が 0 になることを避けるため、式 (4) のメンバシップ関数集合に条件を加えた以下のような部分集合を定義する。

$$\mathcal{F}_{\delta,\sigma} = \left\{ (\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathcal{F} \ : \ \forall x \in [-r_1, r_1]^n, \forall i = 1, 2, \ldots, m \int_{-r_2}^{r_2} \beta_{\mathcal{A}_i B_i}(x, y)dy \geq \delta, \ \sum_{i=1}^{m} \alpha_{\mathcal{A}_i}(x) \geq \sigma \right\} \tag{5}$$

ただし、δ, σ は任意の正定数である。定義式から分かるように、この集合に属しないメンバシップ関数の対は、ある $x \in [-r_1, r_1]^n$ が与えられたとき、前件部のメンバシップ関数のグレード $\mu_{A_{ij}}(x)$ が、すべての $i = 1, 2, \ldots, m$ および $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して 0 となるものである。しかしながら、実際の制御においてそのような設定を行うことは考えられない。また、δ, σ を十分小さな値とすれば実用上影響はほとんどないと考える。ある i 番目のルールの前件部の適合度が 0 となった場合、$\int_{-r_2}^{r_2} \beta_{\mathcal{A}_i B_i}(x, y)dy = 0$ となることがあるが、前件部メンバシップ関数の定義域 $[-r_1, r_1]$ を決める定数 r_1 の設定等で避けることが可能である。

V. 高さ法のメンバシップ関数集合上の汎関数としての連続性

本節では、高さ法を用いた非ファジィ化 ρ が前節の式 (5) で定義したメンバシップ関数集合 $\mathcal{F}_{\delta,\sigma}$ の上の汎関数として連続であることを示す。すなわち、任意の $x \in [-r_1, r_1]^n$ に対して $(\mathcal{A}^k, \mathcal{B}^k) \to (\mathcal{A}, \mathcal{B})$ $(k \to \infty)$ ならば $|\rho_{\mathcal{A}^k\mathcal{B}^k}(x) - \rho_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(x)| \to 0$ であることを示す。各ルールにおける前件部の適合度を求める (過程 1) の関数 α は、min 演算と積演算のどちらを採用した場合においても、すべての $i = 1, 2, \ldots, m$ について $\mu_{A_{ij}^k} \to \mu_{A_{ij}}$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ ならば

$$\|\alpha_{\mathcal{A}_i^k} - \alpha_{\mathcal{A}_i}\|_\infty \equiv \sup_{x \in [-r_1, r_1]^n} |\alpha_{\mathcal{A}_i^k}(x) - \alpha_{\mathcal{A}_i}(x)| \to 0$$

が成立することは容易に証明できる。本論文では省略する。

さらに、(過程 2) の積演算を用いる $\beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x, y) = \alpha_{\mathcal{A}_i}(x)\mu_{B_i}(y)$ の連続性も明らかに成立している。しかしながら、一般に頭切り法と呼ばれる $\beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x, y) = \alpha_{\mathcal{A}_i}(x) \wedge \mu_{B_i}(y)$ は連続性が保障されない。したがって、本研究では (過程 2) において積演算のみを採用する。

次に、式 (5) よりすべての $i = 1, 2, \ldots, m$ について $\int_{-r_2}^{r_2} \beta_{\mathcal{A}_iB_i}(x, y)dy \geq \delta$ であること、$|\alpha_{\mathcal{A}_i}(x)| \leq 1$ $(\forall x \in [-r_1, r_1]^n)$ であることに注意して、三角不等式および Schwarz の不等式を用いると、

$$\begin{aligned}
&|\gamma_{\mathcal{A}^kB_i^k}(x) - \gamma_{\mathcal{A}B_i}(x)| = \left| \frac{\int_{-r_2}^{r_2} y\alpha_{\mathcal{A}_i^k}(x)\mu_{B_i^k}(y)dy}{\int_{-r_2}^{r_2} \alpha_{\mathcal{A}_i^k}(x)\mu_{B_i^k}(y)dy} - \frac{\int_{-r_2}^{r_2} y\alpha_{\mathcal{A}_i}(x)\mu_{B_i}(y)dy}{\int_{-r_2}^{r_2} \alpha_{\mathcal{A}_i}(x)\mu_{B_i}(y)dy} \right| \\
&\leq \frac{1}{\delta^2} \left\{ \left| \int_{-r_2}^{r_2} y\alpha_{\mathcal{A}_i^k}(x)\mu_{B_i^k}(y)dy \right| \left| \int_{-r_2}^{r_2} \alpha_{\mathcal{A}_i}(x)\mu_{B_i}(y)dy - \int_{-r_2}^{r_2} \alpha_{\mathcal{A}_i^k}(x)\mu_{B_i^k}(y)dy \right| \right. \\
&\quad \left. + \left| \int_{-r_2}^{r_2} \alpha_{\mathcal{A}_i^k}(x)\mu_{B_i^k}(y)dy \right| \left| \int_{-r_2}^{r_2} y\alpha_{\mathcal{A}_i^k}(x)\mu_{B_i^k}(y)dy - \int_{-r_2}^{r_2} y\alpha_{\mathcal{A}_i}(x)\mu_{B_i}(y)dy \right| \right\} \\
&\leq \frac{{r_2}^2}{\delta^2} \left\{ \left| \int_{-r_2}^{r_2} (\alpha_{\mathcal{A}_i^k}(x) - \alpha_{\mathcal{A}_i}(x))\mu_{B_i}(y)dy \right| + |\alpha_{\mathcal{A}_i^k}(x)| \left| \int_{-r_2}^{r_2} \mu_{B_i}(y)dy - \int_{-r_2}^{r_2} \mu_{B_i^k}(y)dy \right| \right\} \\
&\quad + \frac{2r_2}{\delta^2} \left\{ |\alpha_{\mathcal{A}_i^k}(x)| \left| \int_{-r_2}^{r_2} y\mu_{B_i^k}(y)dy - \int_{-r_2}^{r_2} y\mu_{B_i}(y)dy \right| + \left| \int_{-r_2}^{r_2} y(\alpha_{\mathcal{A}_i^k}(x) - \alpha_{\mathcal{A}_i}(x))\mu_{B_i}(y)dy \right| \right\} \\
&\leq \frac{{r_2}^2}{\delta^2} \left\{ 2r_2\|\alpha_{\mathcal{A}_i^k} - \alpha_{\mathcal{A}_i}\|_\infty + \left| \int_{-r_2}^{r_2} (\mu_{B_i^k}(y) - \mu_{B_i}(y))dy \right| \right\} \\
&\quad + \frac{2r_2}{\delta^2} \left\{ {r_2}^2\|\alpha_{\mathcal{A}_i^k} - \alpha_{\mathcal{A}_i}\|_\infty + \left| \int_{-r_2}^{r_2} y(\mu_{B_i^k}(y)dy - \mu_{B_i}(y))dy \right| \right\} \\
&\leq \frac{4{r_2}^3}{\delta^2}\|\alpha_{\mathcal{A}_i^k} - \alpha_{\mathcal{A}_i}\|_\infty + \frac{{r_2}^2}{\delta^2} \left(\int_{-r_2}^{r_2} |\mu_{B_i^k}(y) - \mu_{B_i}(y)|^2 dy \int_{-r_2}^{r_2} 1^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \frac{2r_2}{\delta^2} \left(\int_{-r_2}^{r_2} |\mu_{B_i^k}(y) - \mu_{B_i}(y)|^2 dy \int_{-r_2}^{r_2} |y|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{4{r_2}^3}{\delta^2}\|\alpha_{\mathcal{A}_i^k} - \alpha_{\mathcal{A}_i}\|_\infty + \frac{{r_2}^2\sqrt{2r_2}}{\delta^2} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \left(\int_{-r_2}^{r_2} |\mu_{B_i^k}(y) - \mu_{B_i}(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

を得る。ここで、$(\mathcal{A}^k, \mathcal{B}^k) \to (\mathcal{A}, \mathcal{B})$ $(k \to \infty)$ と仮定する。すなわち

$$\|\alpha_{\mathcal{A}_i^k} - \alpha_{\mathcal{A}_i}\|_\infty \quad \to 0$$

および

$$\int_{-r_2}^{r_2} |\mu_{B_i^k}(y) - \mu_{B_i}(y)|^2 dy \to 0$$

であるとすると、上の式より

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in[-r_1,r_1]^n} |\gamma_{\mathcal{A}^k B_i^k}(x) - \gamma_{\mathcal{A}B_i}(x)| = 0$$

を得る。ゆえに、(過程 3) における各制御規則のそれぞれの結論ファジィ集合の代表値を求める重心法 γ が $\mathcal{F}_{\delta,\sigma}$ 上で連続であることが証明された。同様にして、式変形により

$$\begin{aligned}
|\rho_{\mathcal{A}^k\mathcal{B}^k}(x) - \rho_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(x)| &= \left| \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{\mathcal{A}_i^k}(x)\gamma_{\mathcal{A}^k B_i^k}(x)}{\sum_{i=1}^m \alpha_{\mathcal{A}_i^k}(x)} - \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{\mathcal{A}_i}(x)\gamma_{\mathcal{A}B_i}(x)}{\sum_{i=1}^m \alpha_{\mathcal{A}_i}(x)} \right| \\
&\le \frac{1}{\sigma^2} \left\{ \left| \sum_{i=1}^m \alpha_{\mathcal{A}_i}(x) \right| \left| \sum_{i=1}^m \alpha_{\mathcal{A}_i^k}(x)\gamma_{\mathcal{A}^k B_i^k}(x) - \sum_{i=1}^m \alpha_{\mathcal{A}_i}(x)\gamma_{\mathcal{A}B_i}(x) \right| \right. \\
&\qquad \left. + \left| \sum_{i=1}^m \alpha_{\mathcal{A}_i}(x)\gamma_{\mathcal{A}B_i}(x) \right| \left| \sum_{i=1}^m \alpha_{\mathcal{A}_i}(x) - \sum_{i=1}^m \alpha_{\mathcal{A}_i^k}(x) \right| \right\} \\
&\le \frac{1}{\sigma^2} \left\{ m \sum_{i=1}^m (|\alpha_{\mathcal{A}_i^k}(x)||\gamma_{\mathcal{A}^k B_i^k}(x) - \gamma_{\mathcal{A}B_i}(x)| + |\gamma_{\mathcal{A}B_i}(x)||\alpha_{\mathcal{A}_i^k}(x) - \alpha_{\mathcal{A}_i}(x)|) \right. \\
&\qquad \left. + m r_2 \sum_{i=1}^m |\alpha_{\mathcal{A}_i^k}(x) - \alpha_{\mathcal{A}_i}(x)| \right\} \\
&\le \frac{m}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m |\gamma_{\mathcal{A}^k B_i^k}(x) - \gamma_{\mathcal{A}B_i}(x)| + \frac{2mr_2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m |\alpha_{\mathcal{A}_i^k}(x) - \alpha_{\mathcal{A}_i}(x)|
\end{aligned}$$

を得るので、高さ法 ρ は $\mathcal{F}_{\delta,\sigma}$ 上の汎関数として連続である。

VI.　高さ法の前件部変数上のリプシッツ連続性

本節では、高さ法を用いた非ファジィ化の計算が前件部変数上の合成関数としてリプシッツ連続であることを示す。ここで、ある区間 I 上の実関数 f がリプシッツ連続であるとは、定数 L が存在して、すべての $x, y \in I$ に対して、$|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$ が成立することである。

推論過程の α および β に関して、min 演算、積演算どちらを用いた場合でもリプシッツ連続であることは証明済みである [10)]。さらに、各ルールの後件部のメンバシップ関数の重心計算 γ についても、参考文献 10) における重心法を用いた非ファジィ化計算の条件を満たすのでリプシッツ

連続であることがいえる。すなわち、リプシッツ連続関数 α_{A_i} および $\gamma_{\mathcal{A}_i B_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ のリプシッツ定数をそれぞれ $\Delta_{\gamma_{\mathcal{A}B_i}}, \Delta_{\alpha_i}$ とおくと、任意の $x, x' \in [-r_1, r_1]^n$ に対して、

$$|\gamma_{\mathcal{A}B_i}(x) - \gamma_{\mathcal{A}B_i}(x')| \leq \Delta_{\gamma_{\mathcal{A}B_i}} \|x - x'\|$$

および

$$|\alpha_{\mathcal{A}_i}(x) - \alpha_{\mathcal{A}_i}(x')| \leq \Delta_{\alpha_i} \|x - x'\|$$

が成り立っている。また、定義式などにより $|\gamma_{\mathcal{A}B_i}(x)| \leq r_2$, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{\mathcal{A}_i}(x) \geq \sigma$ であることを用いると以下の式を得る。

$$|\rho_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(x) - \rho_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(x')| = \left| \frac{\sum_{i=1}^{m} \alpha_{\mathcal{A}_i}(x)\gamma_{\mathcal{A}B_i}(x)}{\sum_{i=1}^{m} \alpha_{\mathcal{A}_i}(x)} - \frac{\sum_{i=1}^{m} \alpha_{\mathcal{A}_i}(x')\gamma_{\mathcal{A}B_i}(x')}{\sum_{i=1}^{m} \alpha_{\mathcal{A}_i}(x')} \right|$$

$$\leq \frac{m}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{m} |\gamma_{\mathcal{A}B_i}(x) - \gamma_{\mathcal{A}B_i}(x')| + \frac{2mr_2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{m} |\alpha_{\mathcal{A}_i}(x) - \alpha_{\mathcal{A}_i}(x')|$$

$$\leq \frac{m}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{m} \Delta_{\gamma_{\mathcal{A}B_i}} \|x - x'\| + \frac{2mr_2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{m} \Delta_{\alpha_i} \|x - x'\| = \frac{m}{\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^{m} \Delta_{\gamma_{\mathcal{A}B_i}} + 2r_2 \sum_{i=1}^{m} \Delta_{\alpha_i} \right) \|x - x'\|$$

ゆえに、高さ法を用いた非ファジィ化計算は前件部変数空間上でリプシッツ連続である。

VII. まとめ

本研究ではファジィ推論における非ファジィ化計算法の一つである高さ法に関して解析を行った。証明の結果、高さ法は IF-THEN 型ファジィプロダクションルールの前件部変数上の関数としてリプシッツ連続であることおよびメンバシップ関数集合 (ファジィ集合族) 上の汎関数として連続であるという結論が得られた。本研究で得られたリプシッツ条件は、証明過程より、前件部を構成するファジィ集合のメンバシップ関数に与えたリプシッツ条件に依存している。また、このリプシッツ条件は、フィードバック部にファジィ推論を用いたファジィフィードバック制御の状態方程式に解が一意に存在することを保証する [11)]。さらに、汎関数としての連続性はファジィフィードバック制御に最適解を与えるメンバシップ関数対 (ファジィ集合対) の存在性、すなわち IF-THEN 型ファジィプロダクションルールの存在性の研究に大きく寄与できるものと期待できる。本研究で扱った高さ法以外にも、各ルールの結論ファジィ集合の面積で重み付けを行う面積法や、Center of Sums Method、Center of Largest Area Method、First of Maxima Methd、Max Criterion Method など [12)] [13)]、非ファジィ化計算はいくつか提案されている。今後の課題として、それらの非ファジィ化計算に関する考察を行い、ファジィ制御規則の自動構成のための数理的検証を行うことが重要と考える。

参考文献

1) L. A. Zadeh, Fuzzy algorithms, *Information and Control*, 12, pp.94-102, 1968.

2) E. H. Mamdani, Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant, *Proc. IEE* 121, No. 12, pp.1585-1588, 1974.

3) T. Mitsuishi, K. Wasaki, K. Ohkubo, J. Kawabe and Y. Shidama, Fuzzy Optimal Control Using Simple Inference Method and Function Type Inference Method, *Proc. American Control Conference (ACC2000)*, pp1944-1948, 2000.

4) T. Mitsuishi, N. Endou and Y. Shidama, Continuity of Nakamori Fuzzy Model and Its Application to Optimal Feedback Control, *Proc. of IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics (SMC2005)*, pp577-581, 2005.

5) 師玉康成, 楊 毓光, 江口正義, 山浦弘夫, ファジィ集合族のコンパクト性とファジィ最適制御の存在, 日本応用数理学会論文誌, Vol. 6, No. 1, pp.1-14, 1996.

6) 楊 毓光, 和崎克己, 江口正義, 師玉康成, NBV 空間のファジィ集合族のコンパクト性とファジィ最適制御への応用, 電子情報通信学科論文誌、Vol. J82-A, No. 4, pp523-529, 1999.

7) 水本雅晴, ファジィ制御の改善法 (IV) (代数積-加算-重心法による場合), *Proc. 6th Fuzzy System Symposium*, pp.6-13, 1990.

8) 菅野道夫, ファジィ制御, 日刊工業新聞社, 1988.

9) T. Takagi and M. Sugeno, Fuzzy Identification of Systems and its Applications to Modeling and Control, *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. SMC-15, No. 1, pp.116-132, 1985.

10) 三石貴志, ファジィ推論のリプシッツ連続性, 流通科学大学論集 人間・社会・自然編, 第 19 巻, 第 3 号, pp.145-156, 2007.

11) R. K. Miller and A. N. Michel, Ordinary Differential Equations, *Academic Press*, New York, 1982.

12) H. Hellendoorn and C. Thomas, On Quality Defuzzification -Theory and an Application Example-, *Fuzzy Logic and Its Applications to Engineering, Information Sciences, and Intelligent Systems, Kluwer Academic Publishers*, pp.167-176, Netherlands, 1995.

13) Hung T. Nguyen, Nadipuram R. Prasad, Carol L. Walker and Elbert A. Walker, A First Course Fuzzy and Neural Control, *Chapman & Hall/CRC Press*, Florida, 2003.