流通科学大学論集－経済・経営情報編－第16巻第２号，91－104（2008）

小売業が特別展示商品を取り扱う場合の数量割引問題に関する卸売業の最適数量割引政策

— 近似解の導出 —

A Game Theoretical Analysis of the Quantity Discount Problem for Special Display Goods

—An Approximation for the Optimal Quantity Discount Policy—

川勝 英史†
Hidefumi Kawakatsu

本研究では次のような場合に注目し、卸売業と小売業間の数量割引問題について議論する。すなわち、卸売業は数量割引を通じて小売業の発注計画を変更するように促し、小売業は提示された数量割引を利用するかどうかを決定する。問題を卸売業と小売業間のStackelbergゲームとして把握し、卸売業の最適数量割引政策に対する近似解を求めるための方法を提案する。さらに、近似解の有効性についても考察する。

キーワード： 数量割引問題、特別展示商品、Stackelbergゲーム、最適数量割引政策、近似解

I. はじめに

卸売業が小売業に対して商品を販売する際に、Quantity Discount（数量割引）を実施することが少なくない[1–12]。数量割引には、取引数量に応じた割引率を設定することにより、小売業に当初予定していた発注量よりも大きな量を発注させるよう促す効果がある。Sethi[1]、Hardly and Whitin[2]やPeterson and Silver[3]は、売り手によって提示された数量割引計画に対する小売業の最適反応について議論している。これに対して、売り手の立場から最適数量割引政策を求めるためのモデルもいくつか報告されている[4–10]。そこでは、買い手が取り扱う商品の年間需要量が一定である場合に、売り手は買い手に対して単位商品当りの割引価格を市場価格よりも小さく提示し、１回当りの取引数量を大きく提示することで、売り手の利得を大きくできる場合が存在することを示している。しかし、これらのモデルの多くは生産管理を念頭においており、日々の需要が激しく変動し、在庫スペースにも厳しい制約のある小売業を対象にしているとは考えにくい。本研究では、卸売業はメーカーなどから購入した商品を小売業に卸し、小売業はその商品を顧客に販売するような場合に、卸売業の立場から数量割引に関する問題を取り扱うこととする。

スーパーマーケットやコンビニエンスストアにおいては、商品が可能な限り陳列されている傾向にある。これは、商品の陳列量が大きい程よく売れ、少なくなると余り売れなくなるというこ

† 流通科学大学情報学部、〒651－2188　神戸市西区学園西町３－１

（2007年９月５日受理）

ⓒ2008 UMDS Research Association

とが経験的に知られており[11-17]、このような効果を小売店が考慮しているためであると考えられる。Baker and Urban[11]、Urban[12]やBalakrishnan et al.[13]は、需要は確定的であるが、展示されている商品の数量が大きい程よく売れ、商品の数量が小さくなってくるとそれに応じて需要が小さくなるという性質を有する商品に対して、その最適発注量を近似的に求める方法を展開している。この上で、需要が確定的であっても在庫量が0になる前に発注すべきである場合が存在することも示している。しかし、彼らの提案したモデルは、需要関数として時間に対して巾乗の構造を経験的に与えただけであり、その物理的意味は明確ではない。これに対して、筆者らは、同様の性質を顕著に示す「特別展示商品」を対象としたときに、商品の単位時間当り需要量が、現在展示されている数量に比例する部分と時間や展示量に関係のない一定の部分とから成る場合に、単位時間当り総利益を最大にするという意味での最適最大在庫量や最適発注量などを求めるためのモデルを提案している[14-17]。

ここで、特別展示商品とは、スーパーマーケットやコンビニエンスストアの店舗の一区画に山積みされているような商品を意味し、新商品のセールス・プロモーションや、バーゲンセールばかりでなく、通常のセールス・プロモーションにも見られる。

以下では、小売業が「特別展示商品」として販売するような商品を対象とし、小売業は、卸売業に提示された「取引数量」(小売業の発注量)と、この量に応じた「割引率」とをもとに数量割引を利用するかどうかを決定するような場合を考える。

先の研究[17]において筆者は、問題を卸売業と小売業間のStackelbergゲーム[18-20]として把握することにより卸売業の単位時間当り総利益を最大にするという意味での、卸売業の最適発注量、並びに、卸売業が小売業に対して提示する最適取引数量及び最適割引率(最適数量割引政策)の存在条件を解析的に示している。但しそこでは、II.で定義するN_2に関して、$N_2 \geq 2$の場合の解析には相当な困難が伴うため、$N_2 = 1$ (lot-for-lot policy)の場合に注目して卸売業の最適数量割引政策を求めている。

本研究では、先の研究[17]で提案したモデルを用いて、$N_2 \geq 2$の場合について、卸売業の単位時間当り総利益に対する上限及び下限を導出し、これらの上下限を最大にするような取引数量を求めることを通じて、最適数量割引政策の近似解を求める方法について提案する。この上で、数値例により、提案した方法により求められる近似解の有効性についても考察する。

II. 仮定と記号

本研究で主に用いる記号は次の通りである。a_s:卸売業の1回当り発注費用。a_b:小売業の1回当り発注費用。p_s:卸売業が小売業へ単位商品を販売する価格(卸売価格)。y:単位商品当り卸売価格に対する割引率。p_b:小売業の単位商品当り販売価格。c_s:卸売業の単位商品当り購入費用。Q:小売業の最大在庫量。q_1:数量割引を利用しない場合の小売業の発注点$(0 \leq q_1 < Q_U)$。q_2:数量割引を利用する場合の小売業の発注点$(0 \leq q_2 < Q_U)$。Q_U:小売業の在庫量の上限。λ:

変動需要量を与える比例定数（$\lambda > 0$）。μ：小売業の単位時間当り固定需要量。h_s：卸売業の在庫維持管理費用を与える係数。h_b：小売業の在庫維持管理費用を与える係数。

また、本研究での仮定は次の通りである。(1) 商品の需要量は確定的であるが、小売業が店舗に商品を陳列する際、商品の展示量が大きいほど商品の需要量も大きくなり、その展示量が小さくなると需要量も小さくなる。なお、卸売業における商品の需要量は、商品の展示量に依存しない。(2) 小売業の時刻 t における需要量は、時刻 t での在庫量に比例する量と固定需要量とから構成されるとする。(3) 需要が確定的であるので、リードタイムを 0 とみなすことができ、また入庫速度は無限大とする。(4) 取り扱う商品の数量は大きく連続量としてみなすことができる。(5) 小売業におけるバックルーム在庫は認めず、展示可能な商品の最大量（在庫量の上限）Q_U を制約として与える。(6) $\beta = (p_b - p_s)\lambda - h_b > 0$ である[15]。(7) 小売業が数量割引を利用しない場合の単位商品当り卸売価格は p_s であり、小売業は、在庫量が q_1 に到達した時点で在庫水準が Q となるよう $Q - q_1$ だけ発注する。なお、小売業の 1 回当り発注量を「取引数量」と呼ぶことにする。(8) 小売業が数量割引を利用する場合の単位商品当り卸売価格は $(1-y)p_s$ である。また、1 回当り取引数量は $Q_U - q_2$（$0 \leq q_2 < Q_U$）であり、この理由については、III. で説明する。(9) 卸売業の 1 回当り発注量は、小売業の 1 回当り発注量（取引数量）を N_i（$N_i = 1, 2, 3, \cdots$、$i = 1, 2$）倍した量である。ここに、N_1 及び N_2 は、それぞれ、小売業が数量割引を利用しない場合、数量割引を利用する場合の卸売業の発注量を与える係数である。(10) 単位在庫当り単位時間当り在庫維持管理費用は、卸売業及び小売業においてそれぞれ、$c_s h_s$ 及び $p_s h_b$ （$h_s > 0$、$0 < h_b \leq \lambda$）により表現できる[9]。

III. 小売業の単位時間当り総利益

数量割引を利用しない場合の、小売業の単位時間当り総利益は次式により与えることができる[17]。

$$\pi_1(q_1) = \frac{\beta(Q_U - q_1) - a_b\lambda}{M(q_1)} + h_b p_s \rho \tag{1}$$

但し、$\rho = \mu/\lambda$ であり、$M(q_1) = \ln(Q_U + \rho) - \ln(q_1 + \rho)$ である。

ここに

$$\eta(q_1) \equiv (q_1 + \rho)M(q_1) - (Q_U - q_1) \tag{2}$$

とおくと、式 (1) の $\pi_1(q_1)$ を最大にするような $q_1 = q_1^*$ について次のようにまとめられる。なお、$\eta(q_1) < 0$ が成立することは容易に確認できる。

(i) $\eta(0) = \rho \ln \frac{Q_U + \rho}{\rho} - Q_U < -\frac{a_b\lambda}{\beta}$ のとき、正の q_1^*（$< Q_U$）が唯一存在し、$\pi_1(q_1^*) = \beta(q_1^* + \rho) + h_b p_s \rho$ を得る。

(ii) 他の場合には、$q_1^* = 0$ であり、$\pi_1(q_1^*) = \pi_1(0)$ である。

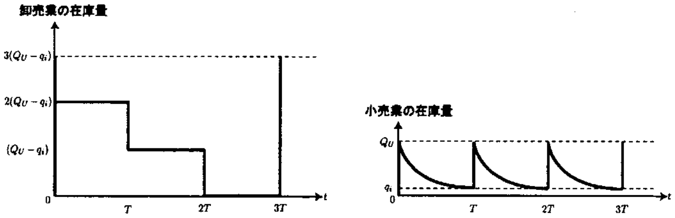


図 1: 在庫量の推移 ($N_i = 3$)

また本研究では、数量割引を利用する場合に得られる小売業の単位時間当り総利益を次式のように与えることができる[17)]。

$$\pi_2(q_2, y) = \frac{[\beta + yp_s(\lambda + h_b)](Q_U - q_2) - a_b\lambda}{M(q_2)} + (1-y)p_s h_b \rho \qquad (3)$$

IV. 卸売業の単位時間当り総利益

小売業が数量割引を利用しない場合、単位商品当り卸売価格は p_s であり、1 回当りに小売業は $Q_U - q_1^*$ なる量を発注する。また仮定 (9) でも述べたように、卸売業の 1 回当り発注量は $N_1(Q_U - q_1^*)$ ($N_1 = 1, 2, 3, \cdots$) により表現することができる。小売業が数量割引を利用しない場合、卸売業の単位時間当り総利益は

$$P_1(N_1, q_1^*) = \lambda\frac{(p_s - c_s)(Q_U - q_1^*) - \frac{a_s}{N_1}}{M(q_1^*)} - \frac{h_s c_s}{2}(Q_U - q_1^*)(N_1 - 1) \qquad (4)$$

により与えられる[17)]。

これに対し、小売業が数量割引を利用する場合には次式が成立する[17)]。

$$P_2(N_2, q_2, y) = \lambda\frac{[(1-y)p_s - c_s](Q_U - q_2) - \frac{a_s}{N_2}}{M(q_2)} - \frac{h_s c_s}{2}(Q_U - q_2)(N_2 - 1) \qquad (5)$$

但し、単位商品当り卸売価格は $(1-y)p_s$、1 回当り取引数量は $Q_U - q_2$ である。

なお、$N_i = 3$ のときの在庫量の推移を図 1 に示しており、図 1 より次のことが確認できる。すなわち、小売業の在庫量は商品の展示量が大きい程よく売れ少なくなると余り売れなくなることを表しており、小売業における在庫水準が q_i ($i = 1, 2$) に到達した時点で $(Q_U - q_i)$ なる量を発注する。また、卸売業は在庫量が 0 となった時点で商品を $N_i(Q_U - q_i)$ だけ発注し、小売業に商品を卸す毎に卸売業の在庫量は $(Q_U - q_i)$ ずつ減少する。

さらに、q_i ($i = 1, 2$) を与えたときの、卸売業の利益を最大にする $N_i = N_i^*(q_i)$ (≥ 1) は次式を満足する整数である。

$$\sqrt{\gamma(q_i) + 1/4} - 1/2 \leq N_i < \sqrt{\gamma(q_i) + 1/4} + 1/2 \qquad (6)$$

ここに、$\gamma(q_i) = 2a_s\lambda/[h_s c_s(Q_U - q_i)M(q_i)]$ である。

V. 小売業の最適反応

小売業のオプションを次のように定義する。

V_1 : 割引販売を利用しない。

V_2 : 割引販売を利用する。

ここで、$\pi(q_2) = \pi_2(q_2, y)$ を y について解くと

$$y = \frac{1}{p_s}\left[\frac{\tilde{\pi}_1 M(q_2) - \beta(Q_U - q_2) + a_b\lambda}{(\lambda + h_b)(Q_U - q_2) - h_b\rho M(q_2)}\right] \tag{7}$$

を得る。但し、$\tilde{\pi}_1 = \pi_1(q_1^*) - h_b p_s \rho$ である。また、式 (7) の右辺における [ ] 内の分母、及び、分子をそれぞれ、$A(q_2)$、$B(q_2)$ とおき、つまり

$$A(q_2) \equiv (\lambda + h_b)(Q_U - q_2) - h_b\rho M(q_2) \tag{8}$$

$$B(q_2) \equiv \tilde{\pi}_1 M(q_2) - \beta(Q_U - q_2) + a_b\lambda \tag{9}$$

とし、式 (7) の右辺を $\psi(q_2)$ とおく。

$$\psi(q_2) \equiv \frac{B(q_2)}{p_s A(q_2)} \tag{10}$$

式 (10) の $\psi(q_2)$ を用いて、領域 Ω_i $(i = 1, 2)$ を次のように定義できる。

$$\Omega_1 = \left\{(q_2, y)\middle| y \leq \psi(q_2)\right\}, \qquad \Omega_2 = \left\{(q_2, y)\middle| y \geq \psi(q_2)\right\}$$

このとき小売業の最適反応は、q_2 と y に対応して、次のようにまとめられる。

(1) $(q_2, y) \in \Omega_1 \setminus \Omega_2$ ならば、$V_1 \succ V_2$ である。すなわち、オプション V_1 を選択することが小売業にとって最適であることがわかる。

(2) $(q_2, y) \in \Omega_2 \setminus \Omega_1$ ならば、$V_2 \succ V_1$ である。

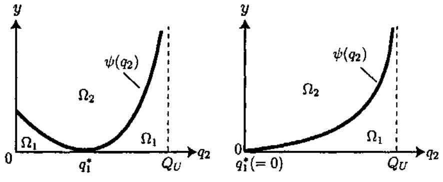
(3) $(q_2, y) \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ ならば、$V_1 \sim V_2$ である。

ここに、$m \succ n$ は n より m が選好されることを意味し、$m \sim n$ は m と n が無差別であることを意味する。

オプション V_1 と V_2 の境界線 $\psi_i(q_2)$ $(i = 1, 2)$ の振る舞いについては、次のようにまとめることができる[17)]。

(i) $\eta(0) = \rho \ln \frac{Q_U + \rho}{\rho} - Q_U < -\frac{a_b\lambda}{\beta}$ の場合。

このとき、$0 \leq q_2 < Q_U$ において、$q_2 \overset{\leq}{\underset{>}{=}} q_1^*$ のとき、$L'_\psi(q_2) \overset{\leq}{\underset{>}{=}} 0$ である。これは、$0 \leq q_2 < q_1^*$、及び、$q_1^* < q_2 < Q_U$ において、$\psi(q_2)$ は q_2 に関して、それぞれ、単調減少、単調増加であることを意味している。さらに式 (10) より、$q_2 = q_1^*$ のとき $\psi(q_1^*) = 0$ であることも容易に分かる。



(a) $\eta(0) < -\frac{a_b\lambda}{\beta}$　　(b) $\eta(0) \geq -\frac{a_b\lambda}{\beta}$

図 2: 小売業の最適反応

(ii) $\eta(0) = \rho \ln \frac{Q_U+\rho}{\rho} - Q_U \geq -\frac{a_b\lambda}{\beta}$ の場合。

このとき、$\psi(q_2)$ は q_2 に関して単調増加である。なお、$q_1^* = 0$ であり、$\psi(0) = 0$ が成立する。

なお図 2 に、Ω_i $(i = 1, 2)$ を示している。以上に述べたこと、及び、図 2 より、$|q_2 - q_1^*|$ が大きくなるに従い、オプション V_1 と V_2 の境界線 $\psi(q_2)$ $(0 \leq q_2 < Q_U)$ も大きくなることが確認できる。これは、小売業が当初予定してた発注点 q_1^* から q_2 の値が離れるにつれて、より大きな割引率 y を提示しなければ小売業は数量割引を利用しないことを意味している。

VI.　最適政策

1.　小売業が数量割引を利用しない場合

$(q_2, y) \in \Omega_1 \setminus \Omega_2$ のとき、小売業は割引販売を利用しない。この場合、卸売業の単位時間当り総利益の最大値は

$$P_1^* \;=\; P_1\left(N_1^*(q_1^*), q_1^*\right) \tag{11}$$

で与えられる。

2.　小売業が数量割引を利用する場合

$(q_2, y) \in \Omega_2 \setminus \Omega_1$ のとき、小売業は数量割引を利用する。この場合、N_2 を与えたとき、卸売業の利益の最大値は次式により与えられる。

$$\hat{P}_2(N_2) \;=\; \sup_{(q_2,y)\in\Omega_2\setminus\Omega_1} P_2(N_2, q_2, y) \tag{12}$$

なお、q_2 が与えられたときの $\hat{P}_2(N_2)$ を最大にする N_2 は、IV. で定義した $N_2^*(q_2)$ により求められる。

式 (5) の $P_2(N_2, q_2, y)$ は、y に関して単調減少であることが容易に確認できる。従って、$P_2(N_2, q_2, y)$ の最大値はオプション V_1 と V_2 の境界線 $\psi(q_2)$ 上で達成することができ、この境界線上の卸

売業の単位時間当り総利益は次のように求めることができる。

$$P_2(N_2, q_2) \;=\; \lambda \frac{\left[g - \frac{B(q_2)}{A(q_2)}\right](Q_U - q_2) - \frac{a_s}{N_2}}{M(q_2)} - \frac{h_s c_s}{2}(Q_U - q_2)(N_2 - 1) \tag{13}$$

但し

$$g \;=\; (p_s - c_s) \tag{14}$$

である。

先の研究[17]では、$N_2 = 1$ の場合（lot-for lot policy）に焦点を絞って解析を展開し、卸売業の最適数量割引政策の存在条件を明らかにしている。そこで示したように、$N_2 \geq 2$ の場合の解析には相当な困難が伴うため、以下では、式（12）を達成するような卸売業の最適割引政策 $(q_2, y) = (q_2^*, y^*)$ に対する近似解を求めるための方法を提案する。なお、ここで提案する近似解法では、$N_2 = 1$ の場合の近似解を求めることもできる。

式（13）の $P_2(N_2, q_2)$ の構造が複雑である一つの要因として、$A(q_2)$ が非線形の構造を有することが考えられる。このため本研究では、q_2 に関して線形の構造を有するような $A(q_2)$ に対する上限並びに下限を導出することを通じて、$P_2(N_2, q_2)$ の上下限を与える場合に注目する。

ここで、式（8）の $A(q_2)$ を書き換えると

$$A(q_2) \;=\; (Q_U - q_2)\left[\lambda + h_b \xi(q_2)\right] \tag{15}$$

となる。但し

$$\xi(q_2) \;\equiv\; 1 - \rho \frac{M(q_2)}{Q_U - q_2} \quad (> 0) \tag{16}$$

であり、式（16）の $\xi(q_2)$ を q_2 に関して微分すると

$$\xi'(q_2) \;=\; -\rho \frac{\eta(q_2)}{(q_2 + \rho)(Q_U - q_2)^2} \tag{17}$$

を得る。ここで、$\eta(q_2) < 0$ より、$\xi'(q_2) > 0$ であることが容易に確認でき、これは、$\xi(q_2)$ が q_2 に関して単調増加であることを意味している。

従って、$\xi(q_2)$ の上限 ξ_U 及び下限 ξ_L は

$$\xi_U \;\equiv\; \lim_{q_2 \to Q_U - 0} \xi(q_2) \;=\; 1 - \frac{\rho}{Q_U + \rho} \tag{18}$$

$$\xi_L \;\equiv\; \xi(0) \;=\; 1 - \rho \frac{M(0)}{Q_U} \tag{19}$$

のように与えることができる。また

$$A_j(q_2) \;\equiv\; (Q_U - q_2)(\lambda + h_b \xi_j) \quad (j = U, L) \tag{20}$$

とおく。式（10）の $\psi(q_2)$ の分母における $A(q_2)$ を、式（20）の $A_j(q_2)$ と置き換えると

$$\psi_j(q_2) \equiv \frac{B(q_2)}{p_s A_j(q_2)} \tag{21}$$

となり、$\psi_j(q_1^*) = \psi(q_1^*)$、及び、$A_j(q_2)$ は ξ_j に関して単調増加であることより、$\psi_U(q_2) \leq \psi(q_2) \leq \psi_L(q_2)$ が成立することが容易に確認できる。

ここに

$$w_j \equiv \frac{\lambda}{\lambda + h_b \xi_j} \tag{22}$$

とおき、式（5）の $P_2(N_2, q_2, y)$ における y に、式（21）の $\psi_j(q_2)$ を代入すると

$$\begin{aligned} P_j(N_2, q_2) &= \frac{(\lambda g + \beta w_j)(Q_U - q_2) - \lambda\left(a_b w_j + \frac{a_s}{N_2}\right)}{M(q_2)} - w_j \tilde{\pi}_1 \\ &\quad - \frac{h_s c_s}{2}(N_2 - 1)(Q_U - q_2) \quad (j = U, L) \end{aligned} \tag{23}$$

を得る。

式（23）の $P_j(N_2, q_2)$ に関して、$P_L(N_2, q_2) \leq P_2(N_2, q_2) \leq P_U(N_2, q_2)$ が成立することが容易に確認できる。従って本研究では、$P_U(N_2, q_2)$ 及び $P_L(N_2, q_2)$ を、それぞれ、$P_2(N_2, q_2)$ に対する、上限、及び、下限と呼ぶことにする。以下では、$P_2(N_2, q_2)$ を最大にするような $q_2 = \tilde{q}_2$ を求める代わりに、$P_j(N_2, q_2)$ を最大にするような $q_2 = \tilde{q}_j$ $(j = U, L)$ を q_2^* に対する近似解として求める場合について議論する。なお、q_j が与えられたとき、$P_j(N_2, q_j)$ を最大にする $N_2 = \tilde{N}_2(q_j)$ (≥ 1) は、IV. で説明した方法により求められる。

式（23）の $P_j(N_2, q_2)$ を q_2 に関して偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_2} P_j(N_2, q_2) &= \frac{-(\lambda g + \beta w_j) M(q_2) + \frac{1}{q_2 + \rho}\left[(\lambda g + \beta w_j)(Q_U - q_2) - \lambda\left(a_b w_j + \frac{a_s}{N_2}\right)\right]}{M^2(q_2)} \\ &\quad + \frac{h_s c_s}{2}(N_2 - 1) \end{aligned} \tag{24}$$

を得る。ここで、$\frac{\partial}{\partial q_2} P_j(N_2, q_2) \geq 0$ は

$$(\lambda g + \beta w_j)\eta(q_2) - \frac{h_s c_s}{2}(N_2 - 1)(q_2 + \rho) M^2(q_2) + \lambda a_b w_j \leq -\frac{a_s}{N_2}\lambda \tag{25}$$

に等価である。式（25）の左辺を $L_j(q_2)$ とおき、$L_j(q_2)$ を q_2 に関して微分すると

$$L_j'(q_2) = M(q_2)\left\{(\lambda g + \beta w_j) - \frac{h_s c_s}{2}(N_2 - 1)\left[M(q_2) - 2\right]\right\} \tag{26}$$

が得られ、$N_2 = 1$ のとき $L_j'(q_2) > 0$ であることが容易に確認できる。また、$N_2 \geq 2$ のとき、$L_j(q_2) \geq 0$ は次式に等価である。

$$q_2 \geq (Q_U + \rho)\exp\left\{-2\left[\frac{\lambda g + \beta w_j}{h_s c_s (N_2 - 1)} + 1\right]\right\} - \rho \tag{27}$$

ここに、$N_2 \geq 2$ のとき式 (27) の右辺を G_j とおき、$N_2 = 1$ のときには $G_j = 0$ とおく。

$$G_j \equiv \begin{cases} (Q_U + \rho)\exp\left\{-2\left[\frac{\lambda g + \beta w_j}{h_s c_s (N_2 - 1)} + 1\right]\right\} - \rho, & N_2 \geq 2 \text{ のとき} \\ 0, & N_2 = 1 \text{ のとき} \end{cases} \tag{28}$$

また、$N_2 \geq 2$ のとき、$G_L < G_U < Q_U$ が成立することが容易に確認でき、$L_j(q_2)$ の q_2 に G_j を代入すると

$$L_j(G_j) = \lambda a_b w_j - (\lambda g + \beta w_j)(Q_U - G_j) - h_s c_s (N_2 - 1)(G_j + \rho) M(G_j) \tag{29}$$

が得られる。

以下では、$L_j(q_2)$ 及び G_j を用いて、最適数量割引政策に対する近似解 $(q_2, y) = (q_j^*, y_j^*)$ の存在条件に関する解析結果を示す。

(i) $L_j(0) \geq -\frac{a_s}{N_2}\lambda$ かつ $G_j > 0$ かつ $L_j(G_j) < -\frac{a_s}{N_2}\lambda$ の場合。

このとき、$L_j(q_2) = 0$ となる正の解が 2 つ存在する。これらの解を $s_j^{(1)}$、$s_j^{(2)}$ $(s_j^{(1)} < s_j^{(2)})$ とする。このとき、式 (23) の $P_j(N_2, q_2)$ を最大にする $q_2 = \tilde{q}_j$ は

$$\tilde{q}_j = \begin{cases} 0, & P_j(N_2, 0) \geq P_j(N_2, s_j^{(2)}) \\ s_j^{(2)}, & P_j(N_2, 0) < P_j(N_2, s_j^{(2)}) \end{cases} \tag{30}$$

となる。

ここで、式 (5) の $P_2(N_2, q_2, y)$ は y に関して単調増加であること、及び、$\psi_U(q_2) \leq \psi(q_2)$ より、$P_2(N_2, \tilde{q}_U, \psi_U(\tilde{q}_U)) \leq P_2(N_2, \tilde{q}_U, \psi(\tilde{q}_U))$ が成立する。また、$\psi_L(q_2) \geq \psi(q_2)$ より、$y = \psi_L(\tilde{q}_L)$ とすると、小売業はオプション V_1 を選択する、つまり、小売業は数量割引を利用しない。このとき、$y \to \psi(\tilde{q}_L) + 0$ とすると、小売業はオプション V_2 を選択する、すなわち、小売業が数量割引を利用することになる。

従って、(q_j^*, y_j^*) は

$$(q_j^*, y_j^*) \to (\tilde{q}_2, \psi(\tilde{q}_2)) \tag{31}$$

により与えられる。

(ii) $L_j(0) < -\frac{a_s}{N_2}\lambda$ かつ $G_j \leq 0$、または、$L_j(0) \leq -\frac{a_s}{N_2}\lambda$ かつ $G_j > 0$ の場合。

このとき、$\frac{\partial}{\partial q_2} P_j(N_2, q_2)$ の符合は正から負に唯 1 度だけ変化する。従って、$P_j(N_2, q_2)$ を最大にする $q_2 = \tilde{q}_j$ $(0 < \tilde{q}_j < Q_U)$ が唯一存在し、(q_j^*, y_j^*) は式 (31) により与えられる。

(iii) $L_j(0) \geq -\frac{a_s}{N_2}\lambda$ かつ $G_j \leq 0$、または、$G_j > 0$ かつ $L_j(G_j) \geq -\frac{a_s}{N_2}\lambda$ の場合。

このとき、$\frac{\partial}{\partial q_2} P_j(N_2, q_2) \leq 0$ であり、このことは、$P_j(N_2, q_2)$ が q_2 に関して非増加であることを意味している。よって、$P_j(N_2, q_2)$ を最大にする q_j は 0 であり、(q_j^*, y_j^*) は

$$(q_j^*, y_j^*) \to (0, \psi(0)) \tag{32}$$

となる。

なお、q_U^* と q_L^* との関係について、次のようにまとめられる。

(a) $\eta(0) = \rho M(0) - Q_U < -\frac{a_b\lambda}{\beta}$ の場合。

この場合、正の q_1^* が唯一存在し、$q_2 \lesseqgtr q_1^*$ のとき $L_U(q_2) \gtreqless L_L(q_2)$ が成立する。これは、$L_U(q_1^*) \lesseqgtr -\frac{a_s}{N_2}\lambda$ のとき、$q_U^* \gtreqless q_U^*$ が成り立つことを意味している。なお、$q_2 = q_1^*$ のとき

$$L_U(q_1^*) \;=\; L_L(q_1^*) \;=\; g\frac{a_b}{\beta}\lambda^2 - \frac{h_s c_s}{2}(N_2-1)(q_1^*+\rho)M^2(q_1^*) \tag{33}$$

である。

(b) $\eta(0) = \rho \ln \frac{Q_U+\rho}{\rho} - Q_U \geq -\frac{a_b\lambda}{\beta}$ の場合。

この場合、$q_1^* = 0$ であり、$q_2 = 0$ $(= q_1^*)$ のとき、及び、$q_2 > 0$ のときには、それぞれ、$L_U(0) = L_L(0)$ 及び $L_U(q_2) < L_L(q_2)$ が成立する。これは、$q_2 = 0$ $(= q_1^*)$ のとき、及び、$q_2 > 0$ のときには、それぞれ、$q_u^* = q_l^*$ $(= 0)$、$q_u^* < q_l^*$ となることを示している。ここで、$q_2 = q_1^*$ $(= 0)$ のとき

$$L_U(q_1^*) \;=\; L_L(q_1^*) \;=\; \lambda g \eta(0) - \frac{h_s c_s}{2}(N_2-1)\rho M^2(0) \tag{34}$$

である。

VII.　数値例

ここでは、小売業における展示量の上限が 350 個程度であるような、インスタントコーヒーや粉末コーヒークリームなどを念頭に置き、本モデルの特徴、並びに、VI.2. で展開した方法により求められる近似解の有効性について考察を行う。本研究では、近似解の有効性を示す指標として次のような相対誤差を用いることができる。

$$RE_L \;=\; \frac{|P_L^* - P_2^*|}{P_2^*} \tag{35}$$

$$RE_U \;=\; \frac{|P_U^* - P_2^*|}{P_2^*} \tag{36}$$

$$RE_a \;=\; \frac{|P_a^* - P_2^*|}{P_2^*} \tag{37}$$

但し

$$q_a^* \;=\; \frac{q_L^* + q_U^*}{2} \tag{38}$$

$$y_a^* \;\rightarrow\; \psi(q_a^*) + 0 \tag{39}$$

$$\hat{P}_j(N_2, q_j^*) \;=\; P_2(N_2, q_j^*, y_j^*) \quad (j = 2, L, U, a) \tag{40}$$

$$P_j^* \;=\; \max_{N_2=1,2,3,\cdots} \left\{ \hat{P}_j(N_2, q_j^*) \right\} \tag{41}$$

表 1: a_s に関する感度分析（1）

	a_s	q_L^*	q_U^*	q_a^*	q_2^*	q_1^*	$y_L^*(\%)$	$y_U^*(\%)$	$y_a(\%)$	$y^*(\%)$
$\lambda = 0.008$	1000	183.663852	184.618998	184.141425	184.299944	133.678068	0.106678	0.11133	0.108988	0.109762
	2000	150.775845	151.068279	150.922062	150.932697	133.678068	0.010767	0.011152	0.010959	0.010973
	2600	133.678068	133.678068	133.678068	133.678068	133.678068	0	0	0	0
	3000	123.083983	122.915986	122.999984	123.014651	133.678068	0.003734	0.003852	0.003793	0.003783
	4000	98.806668	98.284204	98.545436	98.653624	133.678068	0.037506	0.03858	0.038041	0.037819
	5000	76.995348	76.183561	76.589454	76.852586	133.678068	0.093386	0.095881	0.09463	0.093823
$\lambda = 0.05$	1000	283.5426	283.634914	283.588757	283.627634	270.967623	0.131985	0.134094	0.133037	0.133927
	2000	282.213861	282.290878	282.25237	282.284596	270.967623	0.10374	0.105271	0.104504	0.105146
	3000	282.229311	282.302327	282.265819	282.296374	270.967623	0.104046	0.1055	0.104772	0.105381
	4000	282.8114	282.884654	282.848027	282.878771	270.967623	0.115958	0.117509	0.116732	0.117384
	5000	283.656178	283.731404	283.693791	283.725495	270.967623	0.134583	0.13632	0.13545	0.136183
$\lambda = 0.12$	1000	291.241781	291.273056	291.257418	291.271509	279.108503	0.177038	0.178035	0.177536	0.177986
	2000	290.99867	291.027846	291.013258	291.026392	279.108503	0.169397	0.170304	0.16985	0.170259
	3000	291.451149	291.48024	291.465695	291.47881	279.108503	0.183778	0.184726	0.184252	0.18468
	4000	290.920348	290.94745	290.933899	290.946096	279.108503	0.166978	0.167813	0.167395	0.167771
	5000	290.619594	290.645377	290.632486	290.644079	279.108503	0.157876	0.158644	0.15826	0.158605

である。なお、RE_j の値が0のとき P_j^* $(j = L, U, a)$ は P_2^* と等しく、RE_j の値が小さいほどここで求めた近似解が有効であると考えられる。表1及び2に、$\lambda = 0.008$、0.05、0.12 の場合に、a_s の値を1000から5000へと変化させたときの、q_j^*、y_k^*、y^*、P_j^*、RE_k、N_j^* $(j = L, U, a, 2, 1$、$k = L, U, a)$ の値を示す。また、各パラメータの値は $(c_s, p_s, h_s, Q_U, \mu, a_b, p_b, h_b) = (300, 400, 0.0033, 350, 5, 1300, 600, 0.003)$ である。

表1及び2より、a_s が大きくなると、N_2^* の値が同じときには、q_2^* の値は小さくなっていることが確認できる。この理由については、次のように説明可能である。

すなわち、a_s が大きくなると、1回当り取引数量を大きくするために q_2^* を小さく提示して、卸売業の1回当りの発注量を大きくする。これにより、卸売業の発注時間間隔を大きくすることができ、卸売業の発注に係る費用を極力小さく抑える働きを本モデルが有するからであると考えられる。なお、N_2^* が大きくなるとき、q_2^* の値も大きくなり1回当り取引数量は小さくなっているが、卸売業の1回当り発注量 $N_2^*(Q_U - q_2^*)$ は増加している。

さらに、表1及び2より、λ の値を大きくすると、q_2^* の値も大きくなることが確認できる。この理由については、次のように考えることができる。つまり、λ の値が大きいと、小売業において商品を展示しているほど良く売れることとなる。このため、小売業に小刻みに発注させ、小売業における商品の単位時間当り需要量を大きくすることで、卸売業の利益も大きくできる。

表1及び2より、$|q_1^* - q_2^*|$ が大きくなると割引率 y^* も大きくなることや、$q_2^* \neq q_1^*$ のとき $P_1^* < P_2^*$ であることも確認できる。また、$q_2^* < q_1^*$ 及び $q_2^* > q_1^*$ のときには、それぞれ、1回当り取引数量を大きくするような数量割引と、その取引数量を小さくするような数量割引を小売業が利用することを示している。

表2より、λ が小さいとき、つまり、$\lambda = 0.008$ のとき、$1000 \leq a_s < 2600$ 及び $2600 < a_s < 5000$ の場合には RE_a の値が最も小さく、$a_s = 5000$ の場合には RE_L が最も小さくなることが確認できる。また、$a_s = 2600$ のとき $q_1^* = q_2^* = q_j^*$ であり $P_2^* = P_j^*$ $(j = L, U, a)$ である。この理由については次のように説明することができる。すなわち、λ が小さいときには、小売業において商

表 2: a_s に関する感度分析（2）

	a_s	P_L^*	P_U^*	P_a^*	P_2^*	P_1^*	$RE_L(\%)$	$RE_U(\%)$	$RE_a(\%)$	N_j^*	N_1^*
$\lambda = 0.008$	1000	665.588536	665.58969	665.589984	665.59008	657.966944	2.320E-04	5.869E-05	1.445E-05	1	1
	2000	626.977583	626.977603	626.977663	626.977664	626.076638	1.283E-05	9.601E-06	5.903E-08	1	1
	2600	606.942455	606.942455	606.942455	606.942455	606.942455	0	0	0	1	1
	3000	594.535617	594.535603	594.535631	594.535631	594.186333	2.375E-06	4.807E-06	1.063E-07	1	1
	4000	566.115276	566.11497	566.115308	566.115339	562.296027	1.121E-05	6.522E-05	5.599E-06	1	1
	5000	540.584805	540.583721	540.584681	540.584857	530.405721	9.591E-06	2.101E-04	3.254E-05	1	1
$\lambda = 0.05$	1000	1898.363449	1898.364341	1898.364159	1898.364347	1881.524652	4.734E-05	3.474E-07	9.901E-06	3	3
	2000	1813.525495	1813.526136	1813.526007	1813.526142	1799.255421	3.568E-05	2.818E-07	7.409E-06	4	4
	3000	1749.347043	1749.347652	1749.347529	1749.347657	1734.533113	3.513E-05	2.771E-07	7.296E-06	5	4
	4000	1695.439101	1695.439754	1695.439622	1695.439759	1682.467625	3.884E-05	2.965E-07	8.093E-06	6	5
	5000	1647.583269	1647.584005	1647.583855	1647.58401	1634.716958	4.498E-05	3.273E-07	9.415E-06	7	6
$\lambda = 0.12$	1000	4043.191193	4043.191502	4043.191434	4043.191503	4004.984179	7.663E-06	2.077E-08	1.722E-06	5	4
	2000	3921.757605	3921.757885	3921.757823	3921.757886	3884.719128	7.172E-06	1.973E-08	1.610E-06	7	6
	3000	3828.43609	3828.436384	3828.436318	3828.436385	3792.390729	7.703E-06	2.060E-08	1.732E-06	9	7
	4000	3750.146001	3750.146259	3750.146202	3750.14626	3714.371607	6.906E-06	1.908E-08	1.550E-06	10	8
	5000	3680.900787	3680.901025	3680.900972	3680.901025	3645.892004	6.468E-06	1.820E-08	1.450E-06	11	9

品を展示することにより増加する変動需要部分も小さくなる。このため、卸売業は小売業に小刻みに商品を発注させ単位時間当り取引数量を大きくするよりも、極力小売業の発注回数を小さくするよう q_2 を小さく提示することが卸売業にとって得策となる。式（23）より、$q_2 = 0$、及び、$q_2 \to Q_U - 0$ のとき、それぞれ、$P_L^* = P_2^*$、$P_U^* = P_2^*$ が成立すること、並びに、$q_2 = q_1^*$ のとき $P_L^* = P_U^* = P_2^*$ が成立することは容易に確認できる。従って、a_s が大きくなり q_2^* が小さくなるにつれて、q_U^*、q_a^*、q_L^* の順にこれらの近似解と q_2^* との相対誤差が小さくなることを意味している。

一方で、λ が大きいとき、つまり、$\lambda = 0.05$、0.12 のときには、RE_U の値が最も小さくなることが表 2 より確認できる。上述したように、λ が大きくなると q_2^* も大きくなり、q_2^* が大きいときには q_U^* が q_2^* の有効な近似解となることも上で述べた通りである。

また、表 2 より、いずれの場合も相対誤差 RE_L、RE_U、RE_a の値は非常に小さく、これらの誤差は実用上無視可能なぐらい小さいと考えられる。以上に示した数値例ばかりでなく、種々にパラメータを変化させ相対誤差を求めたところ、同様の結果が得られた。この理由については、次のように説明することができる。

つまり、VI.2. でも述べたように、$P_2(N_2, q_1^*) = P_j(N_2, q_1^*)$ $(j = L, U)$ が成立し、$|q_2^* - q_1^*|$ が小さいとき $P_2(N_2, q_2^*) - P_j(N_2, q_j^*)$ も小さくなると考えられる。また、式（10）より $|q_2 - q_1^*|$ が小さくなると、$\psi(q_2)$ も小さくなることが容易に確認できる。従って卸売業は、極力 $|q_2 - q_1^*|$ が小さくなるように q_2 を設定して、割引率を小さくし卸売業自身の利益を大きくしようとするため、相対誤差も小さくなると考えられる。

VIII. おわりに

本論文では、小売業に対して商品を販売するような卸売業の立場から数量割引問題について議論した。先の研究[17]において筆者は、小売業は特別展示商品として販売するような商品を対象とし、小売業は卸売業から提示された 1 回当り取引数量と、この量に応じた単位商品当り割引価格をもとに、数量割引を利用するかどうかを決定するような場合を考え、卸売業の単位時間当り総

利益を最大にするような最適数量割引政策を決定するモデルを提案している。そこでは、問題を卸売業と小売業間のStackelbergゲームとして把握することにより、卸売業の最適数量割引政策を求めているが、$N_2 = 1$（lot-for-lot policy）の場合に焦点を絞り、卸売業の最適数量割引政策の存在条件を解析的に求めている。これに対して本研究では、先の研究[17)]で提案したモデルを用いて、$N_2 \geq 2$の場合について、卸売業の単位時間当り総利益に対する上限、及び、下限を導出し、これらの上下限を最大にするような取引数量を求めることを通じて、卸売業の最適取引数量に関する近似解を求める方法を提案した。さらに、数値例により相対誤差RE_j（$j = L, U, a$）の値を求めたところ、これらの値は無視可能なくらい小さく、提案した方法が有効であることを確認した。

今後の課題として次のことが考えられる。

- $N_2 \geq 2$の場合について、卸売業の最適数量割引政策の存在条件を解析的に示す。
- 実際の小売現場では、鏡や上げ底により外見上の商品数を大きく見せていることが少なくない。小売業がこのような鏡や上げ底を用いた場合の、卸売業の最適数量割引政策についても検討する必要がある。

参考文献

1) S. P. Sethi, A Quantity Discount Lot Size Model with Disposals, *International Journal of Production Research*, **22**, No. 1, (1984), 31-39.

2) G. Hardly and T. M. Whitin, *Analysis of Inventory Systems, Prentice-Hall, Englewood Cliffs*, New York, (1963).

3) R. Peterson and E. A. Silver, *Decision Systems for Inventory Management and Production Planning*, Wiley, New York, (1979).

4) J. P. Monahan, A Quantity Discount Pricing Model to Increase Vendor's Profit, *Management Sci.*, **30**, No. 6, (1984), 720-726.

5) H. L. Lee and M. J. Rosenblatt, A Generalized Quantity Discount Pricing Model to Increase Vendor's Profit, *Management Sci.*, **32**, No. 9, (1984), 1177-1185.

6) M. Data and K. N. Srikanth, Pricing Policies for Quantity Discounts, *Management Sci.*, **33**, No. 10, (1987), 1247-1252.

7) J. P. Monahan, Comments on A Quantity Discount Pricing Model to Increase Vendor's Profit, *Management Sci.*, **34**, No. 11, (1984), 1338-1340.

8) M. J. Rosenblatt and H. L. Lee, Improving Pricing Profitability with Quantity Discounts under Fixed Demand, *IIE Transactions.*, **17**, No. 4, (1985), 338-395.

9) M. Parlar and Q. Wang, A Game Theoretical Analysis of the Quantity Discount Problem with Perfect and Incomplete Information about the Buyer's Cost Structure, *RAIRO/Operations Research*, **29**, No. 4, (1995), 415-439.

10) C. D. J. Waters, *Inventory Control and Management*, John Wiley & Sons, Chichester, (1997).

11) Baker R.C. and Urban T.L., A deterministic inventory system with an inventory-level-dependent deman rate, *Journal of the Operational Research Society*, **39**, No.9, (1988), 15-35.

12) Urban T.L., An inventory-theoretic approach to product assortment and shelf-space allocation, *Journal of Retailing*, **74**, (1998), 15-35.

13) A. Balakrishnan, M. S. Pangburn and E. Stavrulaki, "Stack Them High, Let 'em Fly": Lot-Sizing Policies When Inventories Stimulate Demand, *Management Sci.*, **50**, No. 5, (2004), 630-644.

14) 川勝英史，三道弘明，濱田年男，小売業における特別展示商品に対する最適発注量：単位時間当り総利益の最大化，日本応用数理学会論文誌，**10**，No.2，(2000)，175-186.

15) 川勝英史，三道弘明，濱田年男，小売業における特別展示商品に対する最適発注量：鏡及び上げ底の効果，日本応用数理学会論文誌，**12**，No.2，(2002)，135-154.

16) 川勝英史，数量割引問題に関する卸売業の最適数量割引政策：小売業が特別展示商品を取り扱う場合，流通科学大学論集経済・経営情報編，**14**，No.2，(2005)，83-96.

17) 川勝英史，小売業が特別展示商品を取り扱う場合の数量割引問題に関する卸売業の最適数量割引政策：在庫維持管理費用が商品の購入費用に依存する場合，流通科学大学論集経済・経営情報編，**15**，No.2，(2006)，71-84.

18) R. Gibbons, *Game Theory for Applied Economics*, Princeton Univ. Press, New Jersey, (1992).

19) M. J. Osborne and A. Rubinstein, *A Course in Game Theory*, The MIT Press, Massachusetts, (1994) .

20) D. Fundenburg and J. Tirole, *Game Theory*, The MIT Press, Massachusetts, (1991) .