

道グラフおよびサイクルグラフ 1 辺追加問題の 総頂点間経路長の定式化

Formulation of Total Path Length in Problems of Adding an Edge
to a Path Graph and a Cycle Graph

澤田 清[†]、中西 朗裕[‡]

Kiyoshi Sawada[†], Akihiro Nakanishi[‡]

本論文では、頂点数 L の道グラフに 1 辺を追加する問題、および頂点数 L のサイクルグラフに 1 辺を追加する問題について、総頂点間経路長の定式化を行う。道グラフに 1 辺を追加する問題は辺追加位置に関する決定変数が 2 つ、サイクルグラフに 1 辺を追加する問題は辺追加位置に関する決定変数が 1 つで、どちらも総頂点間経路長を最小にする問題である。各問題について、総頂点間経路長を最小にする辺追加位置の数値例も示す。

キーワード：グラフ理論、道グラフ、サイクルグラフ、辺追加問題、総頂点間経路長

I. はじめに

グラフ理論におけるグラフ内の頂点間に辺を追加する問題¹⁾⁻³⁾は、ネットワークの設計問題、組織内の関係追加問題、都市の道路網や鉄道網の敷設問題などに応用される。グラフに辺を追加する問題の評価尺度はいくつかあるが、現実的な問題に最も合致するのは、総頂点間経路長を最小にする問題であると考えられる。

ここで、グラフにおける総頂点間経路長は、次のように定義される。すなわち、頂点数 n のグラフの 2 頂点 v_i と v_j ($i, j = 1, 2, \dots, n$) の間の最短経路の長さを $l_{i,j}$ とすると (ただし $l_{i,j} = l_{j,i}$, $l_{i,i} = 0$)、 $\sum_{i < j} l_{i,j}$ が総頂点間経路長を表す。

筆者らは、これまで、グラフの中で特に完全 K 分木に注目し、完全 K 分木の総頂点間経路長を最小にする辺の追加位置を求める問題を扱ってきた⁴⁾⁻⁶⁾。完全 K 分木への辺追加問題は、会社などの組織構造にメンバー間の関係を追加する場合に、組織全体の情報伝達が最も効率的になるような関係追加位置を求めるという意味合いがある。

本研究では、頂点数 L の道グラフ (path graph) およびサイクルグラフ (cycle graph) に 1 辺を追加する問題を考える。ここでも、総頂点間経路長が最小となるような辺追加位置を求めることを目的として、総頂点間経路長の定式化を行う。ここで、道グラフとは、単一の道からなるグ

[†]流通科学大学 情報学部 〒 651-2188 神戸市西区学園西町 3-1

[‡]流通科学大学 情報学部 〒 651-2188 神戸市西区学園西町 3-1

ラフである⁷⁾。ただし、道はすべての頂点および辺が異なっている辺の連続である。また、サイクルグラフは、単一のサイクルからなるグラフである⁷⁾。ただし、サイクルは始点と終点のみが同一の頂点でその他の頂点およびすべての辺が異なっている辺の連続である。図 1 に頂点数 $L = 7$ の道グラフを、図 2 に頂点数 $L = 7$ のサイクルグラフを示す。



図 1: 道グラフの例 ($L = 7$)

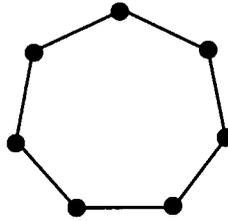


図 2: サイクルグラフの例 ($L = 7$)

これらの問題は、問題自体がシンプルであるため、現実問題にそのまま適用できる状況は少ないが、より複雑なグラフ構造の辺追加問題を考える上で基本となるものであり、本研究の結果をより複雑なグラフ構造の辺追加問題に応用できると考えられる。

II. で道グラフの 1 辺追加問題について総頂点間経路長の定式化を行い、定式化に基づいた数値例を示す。また、III. ではサイクルグラフの 1 辺追加問題について総頂点間経路長の定式化を行い、数値例を示す。

II. 道グラフの 1 辺追加問題

道グラフへの 1 辺追加問題は、頂点数 $L (L = 3, 4, \dots)$ の道グラフに 1 辺を追加するときに、総頂点間経路長を最小にする追加位置を求める問題である。

ここでは、道グラフへの 1 辺追加位置を 2 つの変数 M 、 N で表現する。すなわち、道グラフの一方の端の頂点からの経路長が M の頂点と、他方の端の頂点からの経路長が N の頂点の間に辺を追加する。ここで、 M の範囲は $0 \leq M \leq \lfloor \frac{L-1}{2} \rfloor - 1$ 、 N の範囲は $M \leq N \leq L - M - 3$ とする。ただし、 $\lfloor \cdot \rfloor$ は \cdot を超えない最大の整数を表す。

1. 総頂点間経路長の定式化

道グラフの一方の端の頂点からの経路長が M より小さい頂点の集合を V_1 、他方の端の頂点からの経路長が N より小さい頂点の集合を V_2 とする。また、道グラフ全体の頂点の集合から、 V_1 と V_2 を除いた頂点の集合を V_3 とする。

このとき、 V_1 内の頂点間の経路長の総和、および V_2 内の頂点間の経路長の総和は、それぞれ、

$$A_1(M) = \frac{1}{6}M(M-1)(M+1), \quad (1)$$

$$B_1(N) = \frac{1}{6}N(N-1)(N+1) \quad (2)$$

で与えられる。また、 V_3 内の頂点間の経路長の総和は、

$$C_{1,L}(M, N) = \frac{L-M-N}{2} \left(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{L-M-N}{2} \rfloor} i + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{L-M-N-1}{2} \rfloor} i \right) \quad (3)$$

となる。次に、 V_1 と V_2 の頂点間の経路長の総和は、

$$D_1(M, N) = \frac{1}{2}MN(M+N+4) \quad (4)$$

で与えられる。また、 V_1 と V_3 の頂点間の経路長の総和、および V_2 と V_3 の頂点間の経路長の総和は、それぞれ、

$$E_{1,L}(M, N) = \frac{1}{2}M(M+1)(L-M-N) + M \left(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{L-M-N}{2} \rfloor} i + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{L-M-N-1}{2} \rfloor} i \right), \quad (5)$$

$$F_{1,L}(M, N) = \frac{1}{2}N(N+1)(L-M-N) + N \left(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{L-M-N}{2} \rfloor} i + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{L-M-N-1}{2} \rfloor} i \right) \quad (6)$$

となる。

以上より、頂点数 L の道グラフに 1 辺を追加したときの総頂点間経路長 $S_{1,L}(M, N)$ は、次式のように定式化される。

$$\begin{aligned} S_{1,L}(M, N) &= A_1(M) + B_1(N) + C_{1,L}(M, N) + D_1(M, N) + E_{1,L}(M, N) + F_{1,L}(M, N) \\ &= \frac{1}{6}M(M+1)(3L-2M-3N-1) + \frac{1}{6}N(N+1)(3L-3M-2N-1) \\ &\quad + \frac{1}{2}MN(M+N+4) + \frac{L+M+N}{2} \left(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{L-M-N}{2} \rfloor} i + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{L-M-N-1}{2} \rfloor} i \right) \\ &= \frac{1}{6}M(M+1)(3L-2M-3N-1) + \frac{1}{6}N(N+1)(3L-3M-2N-1) \\ &\quad + \frac{1}{2}MN(M+N+4) + \frac{L+M+N}{4} \left\{ \left\lfloor \frac{L-M-N}{2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{L-M-N}{2} \right\rfloor + 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left\lfloor \frac{L-M-N-1}{2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{L-M-N-1}{2} \right\rfloor + 1 \right) \right\}. \quad (7) \end{aligned}$$

ここで、式 (7) は、 $L - M - N$ が奇数のとき、

$$S_{1,L}(M, N) = \frac{1}{6}M(M+1)(3L-2M-3N-1) + \frac{1}{6}N(N+1)(3L-3M-2N-1) \\ + \frac{1}{2}MN(M+N+4) + \frac{1}{8}(L+M+N)(L-M-N-1)(L-M-N+1), \quad (8)$$

$L - M - N$ が偶数のとき、

$$S_{1,L}(M, N) = \frac{1}{6}M(M+1)(3L-2M-3N-1) + \frac{1}{6}N(N+1)(3L-3M-2N-1) \\ + \frac{1}{2}MN(M+N+4) + \frac{1}{8}(L+M+N)(L-M-N)^2 \quad (9)$$

である。

2. 数値例

表 1 に、 $L = 3, 4, \dots, 20$ の場合について、総頂点間経路長 $S_{1,L}(M, N)$ を最小にする辺追加位置 (M^*, N^*) を数値的に求めた結果を示す。また、 (M^*, N^*) の位置に辺を追加したときの総頂点間経路長 $S_{1,L}(M^*, N^*)$ も合わせて示す。表中、 (M^*, N^*) が 2 つ記載されているものは、総頂点間経路長 $S_{1,L}(M^*, N^*)$ が同じになる (M^*, N^*) が 2 つあることを意味している。

表 1 より、 L が大きいほど M^* 、 N^* が大きくなる傾向があることがわかる。これは、最適な辺追加を行う場合、 L が大きくなるに伴い、 V_1 、 V_2 、 V_3 ともに大きくなるためであると考えられる。また、 L が奇数の場合には、 (M^*, N^*) は 1 つで、かつ M^* と N^* が同じ値になっている。 $M = N$ のとき、 L が奇数の場合は V_3 の頂点数は奇数、 L が偶数の場合は V_3 の頂点数は偶数であるが、 V_3 すなわち辺追加によりできるサイクルの頂点数が奇数の方が効率よく経路長を短縮できるためであると考えられる。

III. サイクルグラフの 1 辺追加問題

サイクルグラフへの 1 辺追加問題は、頂点数 L ($L = 4, 5, \dots$) のサイクルグラフに 1 辺を追加するときに、総頂点間経路長を最小にする追加位置を求める問題である。

ここでは、サイクルグラフへの 1 辺追加位置を 1 つの変数 M で表現する。すなわち、サイクルグラフの各 2 頂点間の経路は 2 通りあるが、そのうち大きくない方の経路長が M である頂点間に辺を追加する。ここで、 M の範囲は $2 \leq M \leq \lfloor \frac{L}{2} \rfloor$ とする。ただし、 $\lfloor \cdot \rfloor$ は \cdot を超えない最大の整数を表す。

表 1: 道グラフの総頂点間経路長を最小にする 1 辺追加位置

L	(M^*, N^*)	$S_{1,L}(M^*, N^*)$
3	(0,0)	3
4	(0,0),(0,1)	8
5	(0,0)	15
6	(0,1)	26
7	(1,1)	40
8	(1,1)	60
9	(1,1)	83
10	(1,2)	114
11	(2,2)	150
12	(1,2),(2,2)	194
13	(2,2)	242
14	(2,2),(2,3)	303
15	(2,2)	369
16	(2,3)	446
17	(3,3)	530
18	(3,3)	629
19	(3,3)	734
20	(3,4)	855

1. 総頂点間経路長の定式化

辺が追加される 2 頂点を v_1, v_2 とする。サイクルグラフに 1 辺追加することにより新たなサイクルが 2 つできるが、そのうち頂点数 $M + 1$ のサイクルに含まれる頂点の集合を V_x 、頂点数 $L - M + 1$ のサイクルに含まれる頂点の集合を V_y とする。 v_1 と v_2 を除く V_x の頂点のうち、 v_2 との間の経路長よりも v_1 との間の経路長の方が小さい頂点の集合を $V_{x,1}$ 、 v_1 との間の経路長よりも v_2 との間の経路長の方が小さい頂点の集合を $V_{x,2}$ 、 v_1 との間の経路長と v_2 との間の経路長が等しい頂点を $v_{x,3}$ と書くことにする。ただし、 $v_{x,3}$ は、 V_x に含まれる頂点数が奇数個のときのみ存在する。また、 v_1 と v_2 を除く V_y の頂点のうち、 v_2 との間の経路長よりも v_1 との間の経路長の方が小さい頂点の集合を $V_{y,1}$ 、 v_1 との間の経路長よりも v_2 との間の経路長の方が小さい頂点の集合を $V_{y,2}$ 、 v_1 との間の経路長と v_2 との間の経路長が等しい頂点を $v_{y,3}$ と書くことにする。ただし、 $v_{y,3}$ は、 V_y に含まれる頂点数が奇数個のときのみ存在する。

このとき、 V_x 内の頂点間の経路長の総和と V_y 内の頂点間の経路長の総和を加えたものは、

$$A_{2,L}(M) = \frac{M+1}{2} \left(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{M+1}{2} \rfloor} i + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{M}{2} \rfloor} i \right) + \frac{L-M+1}{2} \left(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{L-M+1}{2} \rfloor} i + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{L-M}{2} \rfloor} i \right) - 1 \quad (10)$$

で与えられる。次に、 $V_{x,1}$ と $V_{y,2}$ の頂点間の経路長の総和と、 $V_{x,2}$ と $V_{y,1}$ の頂点間の経路長の総

和を加えたものは、

$$B_{2,L}(M) = \left\lfloor \frac{M-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{L-M-1}{2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{M-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{L-M-1}{2} \right\rfloor + 4 \right) \quad (11)$$

となる。また、 $V_{x,1}$ および $v_{x,3}$ と $V_{y,1}$ および $v_{y,3}$ の頂点間の経路長の総和と、 $V_{x,2}$ および $v_{x,3}$ と $V_{y,2}$ および $v_{y,3}$ の頂点間の経路長の総和を加えたものは、

$$C_{2,L}(M) = \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{L-M}{2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{L-M}{2} \right\rfloor + 2 \right) \quad (12)$$

で与えられる。ただし、式(12)は、 $v_{x,3}$ と $v_{y,3}$ の経路長を2回加えているため、 $v_{x,3}$ と $v_{y,3}$ の両方が存在する場合、 $\frac{L}{2}$ を減じる必要がある。 $v_{x,3}$ と $v_{y,3}$ の両方が存在するのは、 $M+1$ と $L-M+1$ がいずれも奇数の場合、すなわち L, M のいずれも偶数の場合である。

以上より、頂点数 L のサイクルグラフに1辺を追加したときの総頂点間経路長 $S_{2,L}(M)$ は、次式のように定式化される。

$$\begin{aligned} S_{2,L}(M) &= A_{2,L}(M) + B_{2,L}(M) + C_{2,L}(M) - t_L(M) \\ &= \frac{M+1}{2} \left(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{M+1}{2} \rfloor} i + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{M}{2} \rfloor} i \right) + \frac{L-M+1}{2} \left(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{L-M+1}{2} \rfloor} i + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{L-M}{2} \rfloor} i \right) - 1 \\ &\quad + \left\lfloor \frac{M-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{L-M-1}{2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{M-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{L-M-1}{2} \right\rfloor + 4 \right) \\ &\quad + \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{L-M}{2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{L-M}{2} \right\rfloor + 2 \right) - t_L(M) \\ &= \frac{M+1}{4} \left\{ \left\lfloor \frac{M+1}{2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{M+1}{2} \right\rfloor + 1 \right) + \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor + 1 \right) \right\} \\ &\quad + \frac{L-M+1}{4} \left\{ \left\lfloor \frac{L-M+1}{2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{L-M+1}{2} \right\rfloor + 1 \right) + \left\lfloor \frac{L-M}{2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{L-M}{2} \right\rfloor + 1 \right) \right\} \\ &\quad + \left\lfloor \frac{M-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{L-M-1}{2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{M-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{L-M-1}{2} \right\rfloor + 4 \right) \\ &\quad + \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{L-M}{2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{L-M}{2} \right\rfloor + 2 \right) - t_L(M). \end{aligned} \quad (13)$$

ただし、 $t_L(M)$ は

$$t_L(M) = \begin{cases} \frac{L}{2} & (L \text{ が偶数かつ } M \text{ が偶数の場合}) \\ 0 & (L \text{ が奇数または } M \text{ が奇数の場合}) \end{cases} \quad (14)$$

である。

ここで、式(13)は、 L が奇数かつ M が奇数のとき、

$$S_{2,L}(M) = \frac{1}{8} \left\{ (L-2)M^2 - (L-1)^2M + L^3 + L^2 - 4L + 3 \right\}, \quad (15)$$

L が奇数かつ M が偶数のとき、

$$S_{2,L}(M) = \frac{1}{8} \left\{ (L-2)M^2 - (L^2 - 2L - 1)M + L^3 + L^2 - 5L + 3 \right\} \quad (16)$$

である。また、 L が偶数かつ M が奇数のとき、

$$S_{2,L}(M) = \frac{1}{8} \left\{ (L-2)M^2 - L(L-2)M + L^3 + L^2 - 3L + 2 \right\}, \quad (17)$$

L が偶数かつ M が偶数のとき、

$$S_{2,L}(M) = \frac{1}{8} \left\{ (L-2)M^2 - L(L-2)M + L^3 + L^2 - 6L + 8 \right\} \quad (18)$$

である。

2. 数値例

表 2 に、 $L = 4, 5, \dots, 20$ の場合について、総頂点間経路長 $S_{2,L}(M)$ を最小にする辺追加位置 M^* を数値的に求めた結果を示す。また、 M^* の位置に辺を追加したときの総頂点間経路長 $S_{2,L}(M^*)$ も合わせて示す。

表 2 より、 L が大きいほど M^* が大きくなっていることがわかる。これは、最適な辺追加を行う場合、 L が大きくなるに伴い、 V_x, V_y ともに大きくなるためであると考えられる。また、 L が奇数のときは $M^* = \frac{L-1}{2}$ 、 L が 4 の倍数のときは $M^* = \frac{L}{2}$ 、 L が 4 の倍数でない偶数のときは $M^* = \frac{L}{2} - 1$ になっていることがわかる。 L が 4 の倍数のときは $M^* = \frac{L}{2}$ となるが、 L が 4 の倍数でない偶数のときは $M^* = \frac{L}{2}$ とならないのは、次の理由によると考えられる。すなわち、 $M = \frac{L}{2}$ のとき、 L が 4 の倍数の場合は V_x, V_y ともに頂点数が奇数、 L が 4 の倍数でない偶数の場合は V_x, V_y ともに頂点数が偶数であるが、 V_x, V_y の頂点数すなわち辺追加によりできるサイクルの頂点数が偶数の場合は、奇数の場合と比べて短縮効率がよくないためであると考えられる。

IV. おわりに

本研究では、頂点数 L の道グラフに 1 辺を追加する場合、および頂点数 L のサイクルグラフに 1 辺を追加する場合のそれぞれについて、総頂点間経路長の定式化を行った。道グラフに 1 辺を追加する場合は辺追加位置に関する決定変数が 2 つ、サイクルグラフに 1 辺を追加する場合は辺追加位置に関する決定変数が 1 つの総頂点間経路長最小化問題である。各問題について、総頂点間経路長を最小にする辺追加位置の数値例を示した。最適解に関する数学的な解析については、今後の課題としたい。

参考文献

- 1) N. Alon, A. Gyárfás, M. Ruszinkó: "Decreasing the diameter of bounded degree graphs", *Journal of Graph Theory*, Vol.35, Issue 3 (2000), pp.161–172.

表 2: サイクルグラフの総頂点間経路長を最小にする 1 辺追加位置

L	M^*	$S_{2,L}(M^*)$
4	2	7
5	2	14
6	2	24
7	3	38
8	4	55
9	4	79
10	4	107
11	5	142
12	6	181
13	6	231
14	6	286
15	7	351
16	8	421
17	8	506
18	8	597
19	9	701
20	10	811

- 2) V. Chepoi, Y. Vaxes: "Augmenting trees to meet biconnectivity and diameter constraints", *Algorithmica*, Vol.33, No.2 (2002), pp.243-262.
- 3) H. Nagamochi: "Recent development of graph connectivity augmentation algorithms", *IE-ICE Trans. on Information and Systems*, Vol.E83-D, No.3 (2000), pp.372-383.
- 4) 澤田 清: "総頂点間経路長を最小にする完全 2 分木の階層間隣接化", 日本応用数学会論文誌, Vol.13, No.3 (2003), pp.353-360.
- 5) K. Sawada, R. Wilson: "Models of adding relations to an organization structure of a complete K -ary tree", *European Journal of Operational Research*, Vol.174 (2006), pp.1491-1500.
- 6) K. Sawada: "A model of adding relations in the two levels to an organization structure of a complete binary tree", *Proc. of Czech-Japan Seminar on Data Analysis and Decision Making under Uncertainty* (2006), pp.298-301.
- 7) R. J. Wilson, J. J. Watkins: *Graphs: An Introductory Approach*, John Wiley & Sons, New York (1990).