流通科学大学論集—経済・情報・政策編—第 21 巻第 1 号，1-21（2012）

資本の不良化と習慣形成効果を同時に考慮した C-CAPM
— 差分型モデルによる考察 —

A Formulation of C-CAPM
Considering Bad Capital and Habit Formation（Difference Model）

森澤　龍也*
Tatsuya Morisawa

本稿は、「資本の不良化」を組み込んだ消費に基づく資産価格決定モデル（C-CAPM）において、代表的家計の効用に対してマイナスの効果を及ぼす「不良資本の逆厚生効果」と「習慣形成効果」を同時に考慮したモデルを提示した。本分析での数値計算によって、資産価格決定モデルに関するパズルは一定の条件下で解消される可能性が示された。
キーワード：不良資本、習慣形成、安全利子率パズル、リスク・プレミアム・パズル、C-CAPM

Ⅰ．はじめに

本稿は、「資本の不良化」および「習慣形成効果」を同時に組み込んだ「消費に基づく資産価格決定モデル（Consumption-based Capital Asset Pricing Model: 以下、C-CAPM と表記）」を定式化し、このモデルにおいて、資産価格決定モデルに関する安全利子率パズル［Weil（1989)］およびリスク・プレミアム・パズル［Mehra and Prescott（1985)］が解消される可能性について考察する。

本稿において上記の問題を分析する動機は、次のようなこれまでの分析経緯にある。森澤（2011*a*）において、C-CAPM に「不良債権・過剰債務の発生」を組み込むための工夫として、「資本の不良化」というアイデアを提示した。続いて、森澤（2011*b*・2012*a*）では、資本の不良化が家計の効用に負の影響を及ぼす「不良資本の逆厚生効果」を考慮することによって、資産価格決定モデルのパズルが解消される理論的可能性について考察した。そして、森澤（2012*b*）において、「不良資本の逆厚生効果」を考慮した C-CAPM について日本のデータで計量分析を行った。この実証結果によると、モデルの当てはまり具合については標準モデルよりも改善される一方で、選好パラメータの推定結果については符号条件や有意性の点で必ずしも改善されなかった。

そこで本稿では、C-CAPM の実証分析において比較的パフォーマンスが良好な「習慣形成効果」［Sundaresan（1989)、Constantinides（1990)、Abel（1990)、Heaton（1995）等］を不良資本の逆

*流通科学大学総合政策学部、〒651-2188　神戸市西区学園西町 3-1
（2012 年 3 月 21 日受理）

厚生効果とともに組み込んで、C-CAPM を定式化する。そして、このモデルが資産価格決定モデルのパズルを解消し得るかについて、数値計算によって分析する。本稿の分析結果によると、このモデルでは通常の標準的なモデルと比較して、資産価格決定モデルに関するパズルを緩和する可能性が示唆されている。

本稿の構成は次の通りである。第Ⅱ節では、不良資本の逆厚生効果および習慣形成効果を組み込んだ C-CAPM を定式化する。第Ⅲ節では、このモデルに基づいて、資産収益率の決定メカニズムを考察する。第Ⅳ節では、本稿のモデルについて、選好パラメータに関する数値計算を行い、資産価格決定モデルに関するパズルを解消し得るか、について検討する。第Ⅴ節では、本稿の議論をまとめる。

Ⅱ．不良資本および習慣形成効果を組み込んだ C-CAPM

本節では、資本の不良化および習慣形成効果を考慮した C-CAPM を提示する。以下のモデルで用いられる記号は、次の通りである。なお、各変数の下付き添え字 t は、時期を表す。

C_t：総消費、K_t：資本ストック、N_t：人口（労働）、$c_t \equiv C_t / N_t$：1 人当たり消費、$k_t \equiv K_t / N_t$：1 人当たり資本ストック、$n_t \equiv N_t / N_{t-1}$：人口成長率（対前期比）、μ_t（$\in[0,1)$）：資本不良度、$\widetilde{K}_t \equiv$（$1-\mu_t$）K_t：有効資本ストック、$\widetilde{k}_t \equiv \widetilde{K}_t / N_t$：1 人当たり有効資本ストック、$s_t$（$\in\{1, 2, \ldots, J\}$）：状態、$\Omega_t$：$t$ 期において利用可能な情報集合、δ（定数）：資本減耗率、ρ（$\in$（$0,\infty$）、定数）：時間選好率、$\beta \equiv 1 /$（$1+\rho$）　（$\beta\in$（$0,1$）、定数）：主観的割引率。

1．資本の不良化と生産活動

この経済において、家計は資本（K_t）と労働（N_t）を保有しており、所得のうちの消費（C_t）と貯蓄の割合を決定するものとする。一方、企業は家計から調達した資本と労働を生産要素として生産活動（Y_t）を行う。

企業は当期（t 期）の生産（Y_t）にあたって、前期末（＝当期初）に家計からレンタルしてきた資本（K_t）を使用する。ストック変数である資本については、t 期初（$t-1$ 期末）の資本ストックを K_t と表記する。この K_t は $t-1$ 期末に借りた直後に、資本減耗とは別に一定割合 μ_t（$\in[0,1)$）で稼働不良を起こしていることが判明するものとしよう。ただし、一旦レンタルしないことには、どれだけ資本の不良化を起こしているか分からないものとする。換言すれば、家計の保有資産である K_t は、企業がそれを借りて生産を開始するときに $\mu_t K_t$ だけ資本価値が下がった不良資本である、ということが判明するのである。

そうすると実際に生産に使用可能な資本ストックは、

$$\widetilde{K}_t \equiv (1-\mu_t)K_t \tag{1}$$

と定義される。この $\widetilde{K}_t$ を生産に投入可能な資本という意味で有効資本ストックと呼ぶ [1)]。

以上のような不良資本が発生するもとで、生産活動は 1 次同次性を満たす次の生産関数で表されるとしよう。

$$Y_t = F(\widetilde{K}_t, N_t) \tag{2}$$

ただし、$F'_{\widetilde{K}} \equiv \dfrac{\partial F}{\partial \widetilde{K}} > 0,\ F''_{\widetilde{K}\widetilde{K}} \equiv \dfrac{\partial^2 F}{\partial \widetilde{K}^2} < 0,\ F'_N \equiv \dfrac{\partial F}{\partial N} > 0,\ F''_{NN} \equiv \dfrac{\partial^2 F}{\partial N^2} < 0.$

この生産関数を 1 人当たりの表示に書き換えた関数は次式で与えられる。

$$y_t = F(\widetilde{k}_t, 1) \equiv f(\widetilde{k}_t) \tag{3}$$

ただし、$f'_{\widetilde{k}} \equiv \dfrac{df}{d\widetilde{k}} > 0,\ f''_{\widetilde{k}\widetilde{k}} \equiv \dfrac{d^2 f}{d\widetilde{k}^2} < 0.$ y_t は t 期における 1 人当たり生産水準（$y_t \equiv Y_t / N_t$）である。$\widetilde{k}_t$ は t 期における 1 人当たり有効資本ストックであり、

$$\widetilde{k}_t \equiv \frac{\widetilde{K}_t}{N_t} = (1-\mu_t)k_t \tag{4}$$

と表される。k_t は t 期における 1 人当たり資本ストック（$k_t \equiv K_t / N_t$）である。

いま、将来の各状態および状態確率の構造を次のように考える。この経済モデルにおいて、初期は 0 期とする。将来の各 t 期（$t \in [1, \infty)$）において J 個の状態（$s_t \in \{1, 2, \ldots, J\}$）が起こりうるとしよう。$t$ 期の各状態 s_t は、t 期初において、生産開始に当たり K_t が投入され、μ_t が判明することによっていずれの状態が実現したか観察できると仮定する[2)]。

続いて、将来状態の生起確率を利用可能な情報集合に基づく条件付き確率によって定義しよう。h 期（$h \in [0, \infty)$）において利用可能な情報集合 Ω_h の条件のもとで、状態 $s_t \in \{1, 2, \ldots, J\}$ が実現する確率を π_h（s_t）と定義する。

$$\pi_h(s_t) \equiv \pi(s_t \mid \Omega_h) \geq 0,\quad for\quad s_t \in [1, J]\quad and\quad h \in [0, \infty). \tag{5}$$

ただし、$\sum_{s_t=1}^{J} \pi_h(s_t) = 1$ である。すなわち、$\pi_h(s_t)$ の総和は 1 に等しい。

マクロ経済的な観点から、生産物は消費、設備投資に支出される。

$$F(\widetilde{K}_t, N_t) = C_t + K_{t+1} - (1-\delta)\widetilde{K}_t \tag{6}$$

ただし、C_t：t 期における総消費、δ：資本減耗率（定数）、である。

支出項目の合計式（6）式を 1 人当たり表示に変換すると、

$$f(\widetilde{k}_t) = c_t + n_{t+1}k_{t+1} - (1-\delta)\widetilde{k}_t \tag{7}$$

となる。ただし、c_t は t 期における 1 人当たり消費（$c_t \equiv C_t / N_t$）、n_{t+1} は t+1 期の人口成長率（対前期比：$n_{t+1} \equiv N_{t+1} / N_t$）、である。なお、労働（＝人口）$N_t$ は各状態 s_t に依存しないものとする。すなわち、

$$N_t(s_t) = N_t \quad \forall s_t \in \{1, 2, \ldots, J\} \tag{8}$$

と仮定する[3)]。

２．不良資本の逆厚生効果と習慣形成効果を同時に考慮した時点効用関数

本節では、不良資本の逆厚生効果および習慣形成効果が代表的家計の効用に与える影響について考察する。森澤（2011*b*・2012*a*）では、当該期の効用に対して資本不良度がマイナスの影響を与えうる「不良資本の逆厚生効果」について考察した。このモデルでは、資本不良度でウェイト付けした消費の負値（$-\mu_t c_t$）が資本の不良化に伴う一種の逆資産効果として作用すると考えている。この効果は不良資本による家計効用へのマイナス効果であることから、森澤（2011*b*）において「不良資本の逆厚生効果」と呼ばれている[4)]。要するにこの効果は、t 期の時点効用関数 u_t について、

$$\frac{\partial u_t}{\partial \mu_t} < 0 \tag{9}$$

という符号関係が成立していることを意味する。森澤（2011*b*・2012*a*）では、この効果を「当期の」不良資本による「当期の」家計効用へのマイナス効果として捉えている。

一方、C-CAPM の拡張方法として、「消費の習慣形成効果」という考え方がある。人々は現在時点で消費活動を行うとき、過去の消費パターンに左右されて現在の消費水準を決定することが間間ある。極端な話として例えば、もともと節約一辺倒だった人が何かのきっかけで大金を入手し、奢侈の味を覚えたとしよう。一度贅沢な生活を経験すると、所得水準が落ち込んだとしても予算を切り詰めた生活にはなかなか戻れないものである。このような人はおそらく以前よりも浪費的な消費パターンをとることが多くなるだろう。このように、現在の消費決定に際して、過去の消費パターンからの慣性が働くことがある。これを消費の習慣性、あるいは、習慣形成（habit formation）と呼ぶ。このような消費の性質をより極端な形で表したのが、Duesenberry（1949）や Modigliani（1949）らによって提唱された消費の習慣仮説（habit persistence hypothesis）である。

本稿における消費の習慣形成効果をより具体的に定義すると、それは「効用に対する消費の習慣形成効果」、すなわち、「今期の消費が来期の消費の限界効用に与える正の効果（a positive effect of today’s consumption on tomorrow’s marginal utility of consumption）」[5)]、

$$\frac{\partial^2 u_{t+1}}{\partial c_{t+1}\partial c_t} > 0 \tag{10}$$

のことである。

本稿では、「不良資本の逆厚生効果」および「消費の習慣形成効果」を同時に考慮する C-CAPM をモデル化するため、時点効用関数を次のように定式化する。

$$u(X_t) = u(c_t - \alpha\mu_{t-1}c_{t-1}) \tag{11}$$

$$X_t \equiv c_t - \alpha\mu_{t-1}c_{t-1} \tag{12}$$

ただし、X_t：不良資本の逆厚生効果および習慣形成効果を考慮した今期および来期の消費から得られるサービス・フロー、α：不良資本の逆厚生効果および消費の習慣形成効果の同時効果の程

度を表す外部効果度パラメータ（定数、$\alpha\mu_{t-1}\in[0,1)$）、である。（11）式のような時点効用関数に基づく C-CAPM は「差分型モデル（difference model）」と呼ばれている[6)]。

（11）式の時点効用関数は次の性質を満たすものとする。すなわち、サービス・フローX_tに関する導関数について、

$$
\begin{aligned}
u'_{X,t} &\equiv \frac{du(X_t)}{dX_t} > 0 \\
u''_{X,t} &\equiv \frac{d^2u(X_t)}{(dX_t)^2} < 0 \\
u'''_{X,t} &\equiv \frac{d^3u(X_t)}{(dX_t)^3} > 0
\end{aligned}
\tag{13}
$$

という符号条件を満たしているものと仮定する。上の関係と $\alpha\mu_{t-1}\in[0,1)$ という仮定のもとで、時点効用関数（11）式は、消費 c_t に関する導関数について、

$$
\begin{aligned}
u'_{c,t} &\equiv \frac{\partial u(X_t)}{\partial c_t} = u'_{X,t} > 0 \\
u''_{c,t} &\equiv \frac{\partial^2 u(X_t)}{(\partial c_t)^2} = u''_{X,t} < 0 \\
u'''_{c,t} &\equiv \frac{\partial^3 u(X_t)}{(\partial c_t)^3} = u'''_{X,t} > 0
\end{aligned}
\tag{14}
$$

という符号条件を満たす。

（13）式および（14）式の意味するところは、当期の時点効用関数（11）式は当期の消費に関して厳密に凹であり、当期の限界効用関数は当期の消費に関して厳密に凸である、ということである。換言すると、これは危険回避的な消費者行動を想定していることを意味する。

（13）式、（14）式および $\alpha\mu_{t-1}\in[0,1)$ より、時点効用関数（11）式は、次の関係を満たしている。

$$
\frac{\partial^2 u(X_{t+1})}{\partial c_{t+1}\partial c_t} = \frac{\partial u'_{c,t+1}}{\partial c_t} = -\alpha\mu_t u''_{X,t+1} > 0 \tag{15}
$$

$$
\frac{\partial u(X_t)}{\partial \mu_{t-1}} = -\alpha c_{t-1} u'_{X,t} < 0 \tag{16}
$$

すなわち、（15）式は習慣形成効果（10）式が時点効用関数（11）式で作用していることを意味している。また、（16）式は時点効用関数（11）式のもとで不良資本の逆厚生効果が働いていることを含意している。ただし、（16）式では時点効用関数（11）式の定式化ゆえに、不良資本の逆厚生効果が「前期」の資本不良度に関する導関数という修正された形で再定義されていることに注意されたい。

３．代表的家計の最適化問題

本節では、北村・藤木（1997）の「生産側情報を利用した C-CAPM」に基づき、資本の不良化および習慣形成が資産価格決定に与える影響を分析する。代表的家計は予算制約のもとで、現在（0 期）から将来にかけての消費から得られる期待効用の割引現在価値が最大になるように消費支出と資産保有を選択する、としよう。これを定式化すると、次の数学的問題になる 7)。

$$\max_{c_t, k_{t+1}} \quad u(X_0) + \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{s_t=1}^{J} \beta^t \cdot u\big(X_t(s_t)\big) \cdot \pi_0(s_t)$$

$$\text{subject to} \quad f\big(\tilde{k}_t(s_t)\big) = c_t(s_t) + n_{t+1} \cdot k_{t+1}(s_{t+1}) - (1-\delta) \cdot \tilde{k}_t(s_t) \qquad (7)$$

$$\tilde{k}_t(s_t) = \big(1 - \mu_t(s_t)\big) \cdot k_t(s_t) \qquad (4)$$

$$X_t(s_t) = c_t(s_t) - \alpha \cdot \mu_{t-1}(s_{t-1}) \cdot c_{t-1}(s_{t-1}) \qquad (12)$$

ただし、ρ（∈（0,∞）、定数）：時間選好率、$\beta \equiv 1/(1+\rho)$ （β∈（0,1）、定数）：主観的割引率、である。

この問題を解くためのラグランジュ関数は次のように設定される。

$$\begin{aligned} L = {} & u(X_0) + \lambda_0\Big(f\big(\tilde{k}_0\big) - c_0 - n_1 \cdot k_1 + (1-\delta) \cdot \tilde{k}_0\Big) \\ & + \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{s_t=1}^{J} \beta^t \Big[u\big(X_t(s_t)\big) + \lambda_t\Big(f\big(\tilde{k}_t(s_t)\big) - c_t(s_t) - n_{t+1} \cdot k_{t+1}(s_{t+1}) + (1-\delta) \cdot \tilde{k}_t(s_t)\Big)\Big]\pi_0(s_t) \end{aligned} \qquad (17)$$

ただし、$\{\lambda_t\}_{t=0}^{\infty}$ はラグランジュ乗数の系列である。

このとき、最大化のための一階の条件は以下のようになる。

$$c_t(s_t): \quad u'_{X,t}(s_t) - \alpha\beta \cdot \mu_t(s_t) \cdot u'_{X,t+1}(s_{t+1}) - \lambda_t = 0 \quad for \ \ t \in [0, \infty) \ \ and \ \ s_t \in \{1, 2, ..., J\} \qquad (18)$$

$$\begin{aligned} k_{t+1}(s_{t+1}): \quad & \lambda_t \cdot n_{t+1} \cdot \pi_t(s_t) \\ & - \beta \cdot \lambda_{t+1} \cdot \big(1 - \mu_{t+1}(s_{t+1})\big)\Big(1 + f'_{\tilde{k},t+1}(s_{t+1}) - \delta\Big) \cdot \pi_t(s_{t+1}) = 0 \\ & for \ \ t \in [0, \infty) \ \ and \ \ s_t, s_{t+1} \in \{1, 2, ..., J\} \end{aligned} \qquad (19)$$

ただし、$u'_{X,t}(s_t) \equiv \dfrac{du\big(X_t(s_t)\big)}{dX_t(s_t)}$，$f'_{\tilde{k},t+1}(s_{t+1}) \equiv \dfrac{df\big(\tilde{k}_{t+1}(s_{t+1})\big)}{d\tilde{k}_{t+1}(s_{t+1})}$.

（19）式に（18）式を代入して整理すると、次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} & \beta\left(\frac{u'_{X,t+1}(s_{t+1}) - \alpha\beta \cdot \mu_{t+1}(s_{t+1}) \cdot u'_{X,t+2}(s_{t+2})}{u'_{X,t}(s_t) - \alpha\beta \cdot \mu_t(s_t) \cdot u'_{X,t+1}(s_{t+1})}\right)\big(1 - \mu_{t+1}(s_{t+1})\big)\Big(1 + f'_{\tilde{k},t+1}(s_{t+1}) - \delta\Big) \cdot \pi_t(s_{t+1}) \\ & - n_{t+1} \cdot \pi_t(s_t) = 0 \qquad for \ \ t \in [0, \infty) \ \ and \ \ s_t, s_{t+1} \in \{1, 2, ..., J\} \end{aligned} \qquad (20)$$

（20）式の期待値をとると、

$$\begin{aligned} & \beta \sum_{s_{t+1}=1}^{J}\left(\frac{u'_{X,t+1}(s_{t+1}) - \alpha\beta \cdot \mu_{t+1}(s_{t+1}) \cdot u'_{X,t+2}(s_{t+2})}{u'_{X,t}(s_t) - \alpha\beta \cdot \mu_t(s_t) \cdot u'_{X,t+1}(s_{t+1})}\right)\big(1 - \mu_{t+1}(s_{t+1})\big)\Big(1 + f'_{\tilde{k},t+1}(s_{t+1}) - \delta\Big) \cdot \pi_t(s_{t+1}) \\ & - n_{t+1} = 0 \qquad for \ \ t \in [0, \infty) \end{aligned} \qquad (21)$$

が成立する。（21）式はオイラー方程式と呼ばれる関係であり、均衡資産収益率の決定式である。

ここで、確率変数 x_t に関する条件付き期待値オペレータを

$$E_h\{x_t|\Omega_h\} \equiv \sum_{s_{t+j}=1}^{J} x_t(s_{t+j})\cdot\pi_h(s_{t+j}) \quad for\ \ t\in[1,\infty),\ \ j\in[0,\infty),\ \ and\ \ h\in[0,\infty) \tag{22}$$

と定義すると、オイラー方程式（21）式は

$$E_t\left\{\beta\left(\frac{u'_{X,t+1}-\alpha\beta\cdot\mu_{t+1}\cdot u'_{X,t+2}}{u'_{X,t}-\alpha\beta\cdot\mu_t\cdot u'_{X,t+1}}\right)(1-\mu_{t+1})\left(1+f'_{\tilde{k},t+1}-\delta\right)-n_{t+1}\middle|\Omega_t\right\}=0 \quad for\ \ t\in[0,\infty) \tag{23}$$

と表すことができる。

ここで、人口は一定（n_{t+1} = 1）であり、家計保有資産である資本の実質資産収益率 r_{t+1} は有効資本の純限界生産性に等しい、としよう [8)]。

$$r_{t+1}=f'_{\tilde{k},t+1}-\delta \quad for\ \ t\in[0,\infty) \tag{24}$$

以上の関係を考慮すると、オイラー方程式（21）式は、

$$\beta\sum_{s_{t+1}=1}^{J}\left(\frac{u'_{X,t+1}(s_{t+1})-\alpha\beta\cdot\mu_{t+1}(s_{t+1})\cdot u'_{X,t+2}(s_{t+2})}{u'_{X,t}(s_t)-\alpha\beta\cdot\mu_t(s_t)\cdot u'_{X,t+1}(s_{t+1})}\right)(1-\mu_{t+1}(s_{t+1}))(1+r_{t+1}(s_{t+1}))\cdot\pi_t(s_{t+1})-1=0 \tag{25}$$

$$for\ \ t\in[0,\infty)$$

と表され、期待値オペレータ表現のオイラー方程式（23）式は、

$$E_t\left\{\beta\left(\frac{u'_{X,t+1}-\alpha\beta\cdot\mu_{t+1}\cdot u'_{X,t+2}}{u'_{X,t}-\alpha\beta\cdot\mu_t\cdot u'_{X,t+1}}\right)(1-\mu_{t+1})(1+r_{t+1})-1\middle|\Omega_t\right\}=0 \quad for\ \ t\in[0,\infty) \tag{26}$$

と表される。

Ⅲ．資産収益率の決定メカニズム

本節では、不良資本の逆厚生効果および習慣形成効果を考慮したモデルについて、時点効用関数を特定化したうえで、期待実質資産収益率の決定メカニズムを導出する。続いて、この関係から資産価格決定モデルにおいてよく知られている安全利子率パズル、および、リスク・プレミアム・パズルを検証するためのモデルを提示する。

１．時点効用関数の特定化と選好パラメータ

資産価格決定モデルや経済成長モデルなどの動学的マクロ経済モデルで、よく用いられる時点効用関数の標準的な特定化として、次のような関数型がある。

$$u(c_t)=\begin{cases}\dfrac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} & for\ \ \gamma>0\ \ and\ \ \gamma\neq 1\\ \log c_t & for\ \ \gamma=1\end{cases} \tag{27}$$

ただし、パラメータ γ は定数である。

また、Arrow（1951）および Pratt（1964）の相対的危険回避度（relative risk aversion)、および、

Kimball（1990）の相対的慎重度 （相対的プルーデンス; relative prudence）はそれぞれ、次の（28）式および（29）式のように表される [9)]。

$$\gamma_t \equiv -\frac{u''_{c,t} c_t}{u'_{c,t}} \tag{28}$$

$$\varepsilon_t \equiv -\frac{u'''_{c,t} c_t}{u''_{c,t}} \tag{29}$$

この時点効用関数について、相対的危険回避度（28）式、相対的慎重度（29）式を計算するとそれぞれ、

$$\gamma_t = \gamma > 0 \ \ (const.) \tag{30}$$

$$\varepsilon_t = \gamma + 1 > 1 \ \ (const.) \tag{31}$$

となる。すなわち、（30）式および（31）式で表されているように、時点効用関数（27）式のもとでは、相対的危険回避度および相対的慎重度は定数となることがわかる。特に（30）式で示された性質から、時点効用関数（27）式は、相対的危険回避度一定（Constant Relative Risk Aversion: 以下では、CRRA と表記）型効用関数と呼ばれている。

さて、本稿では不良資本の逆厚生効果および習慣形成効果を同時に考慮した C-CAPM を考察している。本稿のモデルでは、第Ⅱ.2 節で議論したように、時点効用関数をサービス・フローX_tに関する関数（11）式として定式化した。時点効用関数（11）式の特定化に当たり、サービス・フローX_tに関する効用関数を CRRA 関数型に基づき次のように定式化する。

$$u(X_t) = \begin{cases} \dfrac{X_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} & for \ \ \gamma > 0 \ \ and \ \ \gamma \neq 1 \\ \log X_t & for \ \ \gamma = 1 \end{cases} \tag{32}$$

この時点効用関数（32）式のもとで、相対的危険回避度 γ_t と相対的慎重度 ε_t はそれぞれ、次のように表される。

$$\gamma_t = \gamma \frac{c_t}{X_t} \tag{33}$$

$$\varepsilon_t = (\gamma + 1) \frac{c_t}{X_t} \tag{34}$$

時点効用関数（32）式の場合では、（33）式および（34）式から明らかなように、標準的な CRRA 型効用関数（27）式の場合と異なり、相対的危険回避度や相対的慎重度はもはや一定ではなくなる。このモデルを現実のデータに即して分析することによって、資産価格決定モデルのパズルと相対的危険回避度の関係を考察できる。すなわち、もしこのモデルのもとで資産価格決定モデルのパズルが解消されるならば、これらのパズルは相対的危険回避度や異時点間の代替弾力性を一定と仮定したことに原因の一端があったのかもしれない。

時点効用関数を（32）式に特定化した場合、オイラー方程式（26）式は、

$$E_t\left\{\beta\left(\frac{X_{t+1}^{-\gamma}-\alpha\beta\cdot\mu_{t+1}\cdot X_{t+2}^{-\gamma}}{X_t^{-\gamma}-\alpha\beta\cdot\mu_t\cdot X_{t+1}^{-\gamma}}\right)(1-\mu_{t+1})(1+r_{t+1})-1\middle|\Omega_t\right\}=0 \quad for \;\; t\in[0,\infty) \tag{35}$$

となる。このオイラー方程式が本稿でのパズルの検証対象となる式である。

2．実質資産収益率の決定メカニズム

オイラー方程式（35）式についてテイラー展開を行うことによって、実質資産収益率の決定式を導出しよう。まず、そのための準備として、次のような関係を定義する。

$$\begin{aligned} & v\big(g_{c,t}(s_t),\, g_{c,t+1}(s_{t+1}),\, g_{c,t+2}(s_{t+2}),\, \mu_{t-1}(s_{t-1}),\, \mu_{t+1}(s_{t+1}),\, r_{t+1}(s_{t+1}),\, \rho\big) \\ & \equiv \left[\frac{1-\dfrac{\alpha\cdot\mu_{t+1}(s_{t+1})}{1+\rho}\cdot\left(\dfrac{1+g_{c,t+2}(s_{t+2})-\alpha\cdot\mu_{t+1}(s_{t+1})}{1-\alpha\cdot\mu_t(s_t)\cdot(1+g_{c,t+1}(s_{t+1}))^{-1}}\right)^{-\gamma}}{(1+\rho)\left(\dfrac{1+g_{c,t+1}(s_{t+1})-\alpha\cdot\mu_t(s_t)}{1-\alpha\cdot\mu_{t-1}(s_{t-1})\cdot(1+g_{c,t}(s_t))^{-1}}\right)^{\gamma}-\alpha\cdot\mu_t(s_t)}\right] \\ & \quad \times(1-\mu_{t+1}(s_{t+1}))(1+r_{t+1}(s_{t+1}))\cdot\pi_t(s_{t+1}) \qquad for \;\; t\in[0,\infty) \;\; and \;\; s_t\in\{1,2,\ldots,J\} \end{aligned} \tag{36}$$

ただし、$g_{x,t}\equiv x_t/x_{t-1}-1$ ： x_t の成長率、である。

ちなみに、（36）式について期待値をとった式は、オイラー方程式（35）式と同値になる。すなわち、（35）式と（36）式より、

$$\sum_{s_{t+1}=1}^{J} v\big(g_{c,t}(s_t),\, g_{c,t+1}(s_{t+1}),\, g_{c,t+2}(s_{t+2}),\, \mu_{t-1}(s_{t-1}),\, \mu_{t+1}(s_{t+1}),\, r_{t+1}(s_{t+1}),\, \rho\big)=1 \quad for \;\; t\in[0,\infty) \tag{37}$$

という関係が成り立つ。

（36）式を $g_{c,t}, g_{c,t+1}, g_{c,t+2}, \mu_{t-1}, \mu_{t+1}, r_{t+1}, \rho$ についてテイラー展開し [10]、r_{t+1} の期待値で整理し、下記の分散オペレータおよび共分散オペレータ

$$\begin{aligned} & Var_h\{x_t|\Omega_h\}\equiv\sum_{s_{t+j}=1}^{J}\big(x_t(s_{t+j})-E_h\{x_t|\Omega_h\}\big)^2\cdot\pi_h(s_{t+j}) \\ & \quad for \;\; t\in[1,\infty),\;\; j\in[0,\infty),\;\; and \;\; h\in[0,\infty) \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} & Cov_h\{x_t,y_t|\Omega_h\}\equiv\sum_{s_{t+j}=1}^{J}\big(x_t(s_{t+j})-E_h\{x_t|\Omega_h\}\big)\big(y_t(s_{t+j})-E_h\{y_t|\Omega_h\}\big)\cdot\pi_h(s_{t+j}) \\ & \quad for \;\; t\in[1,\infty),\;\; j\in[0,\infty),\;\; and \;\; h\in[0,\infty) \end{aligned} \tag{39}$$

と期待値オペレータを用いて表すと、次のような近似式を得ることができる [11]。

$$
\begin{aligned}
E_t\left(r_{t+1}\middle|\Omega_t\right) \cong\ & \rho + \frac{\mu_t}{1-\mu_t} + \omega_1 \cdot E_t\left(g_{c,t}\middle|\Omega_t\right) + \omega_2 \cdot E_t\left(g_{c,t+1}\middle|\Omega_t\right) + \omega_3 \cdot E_t\left(g_{c,t+2}\middle|\Omega_t\right) \\
& + \omega_4 \cdot Var_t\left(g_{c,t}\middle|\Omega_t\right) + \omega_5 \cdot Var_t\left(g_{c,t+1}\middle|\Omega_t\right) + \omega_6 \cdot Var_t\left(g_{c,t+2}\middle|\Omega_t\right) \\
& + \omega_7 \cdot E_t\left(g_{\mu,t}\middle|\Omega_t\right) + \omega_8 \cdot E_t\left(g_{\mu,t+1}\middle|\Omega_t\right) + \omega_9 \cdot Var_t\left(g_{\mu,t}\middle|\Omega_t\right) + \omega_{10} \cdot Var_t\left(g_{\mu,t+1}\middle|\Omega_t\right) \\
& + \omega_{11} \cdot Cov_t\left(g_{c,t}, g_{c,t+1}\middle|\Omega_t\right) + \omega_{12} \cdot Cov_t\left(g_{c,t}, g_{c,t+2}\middle|\Omega_t\right) + \omega_{13} \cdot Cov_t\left(g_{c,t+1}, g_{c,t+2}\middle|\Omega_t\right) \\
& + \omega_{14} \cdot Cov_t\left(g_{c,t}, g_{\mu,t}\middle|\Omega_t\right) + \omega_{15} \cdot Cov_t\left(g_{c,t}, g_{\mu,t+1}\middle|\Omega_t\right) \\
& + \omega_{16} \cdot Cov_t\left(g_{c,t+1}, g_{\mu,t}\middle|\Omega_t\right) + \omega_{17} \cdot Cov_t\left(g_{c,t+1}, g_{\mu,t+1}\middle|\Omega_t\right) \\
& + \omega_{18} \cdot Cov_t\left(g_{c,t+2}, g_{\mu,t}\middle|\Omega_t\right) + \omega_{19} \cdot Cov_t\left(g_{c,t+2}, g_{\mu,t+1}\middle|\Omega_t\right) \\
& + \omega_{20} \cdot Cov_t\left(g_{\mu,t}, g_{\mu,t+1}\middle|\Omega_t\right) \qquad for \ \ t \in [0, \infty)
\end{aligned} \tag{40}
$$

ただし、

$$\omega_1 \equiv -\frac{\gamma\alpha\mu_t}{(1-\alpha\mu_t)^2} \tag{41}$$

$$\omega_2 \equiv \frac{\gamma(1+\alpha^2\mu_t^2)}{(1-\alpha\mu_t)^2} \tag{42}$$

$$\omega_3 \equiv -\frac{\gamma\alpha\mu_t}{(1-\alpha\mu_t)^2} \tag{43}$$

$$\omega_4 \equiv -\frac{\gamma\alpha\mu_t}{2(1-\alpha\mu_t)^4}\left[(\gamma-1)\alpha^2\mu_t^2 + (\gamma+3)\alpha\mu_t - 2\right] \tag{44}$$

$$\omega_5 \equiv -\frac{\gamma}{2(1-\alpha\mu_t)^4}\left[(\gamma+1)\alpha^4\mu_t^4 - (\gamma+3)\alpha^3\mu_t^3 + 2(\gamma+1)\alpha^2\mu_t^2 + (\gamma-1)\alpha\mu_t + \gamma + 1\right] \tag{45}$$

$$\omega_6 \equiv \frac{\gamma(\gamma+1)\alpha\mu_t}{2(1-\alpha\mu_t)^3} \tag{46}$$

$$\omega_7 \equiv -\frac{\gamma\alpha\mu_{t-1}}{(1-\alpha\mu_t)^2} \tag{47}$$

$$\omega_8 \equiv -\frac{\alpha\mu_t\left[(\gamma+1)\alpha\mu_t - 1\right]}{(1-\alpha\mu_t)^2} + \frac{\mu_t}{1-\mu_t} \tag{48}$$

$$\omega_9 \equiv -\frac{\gamma\alpha^2\mu_{t-1}^2\left[(\gamma+1)\alpha\mu_t + \gamma - 1\right]}{2(1-\alpha\mu_t)^4} \tag{49}$$

$$\omega_{10} \equiv \frac{\alpha\mu_t^2}{2(1-\alpha\mu_t)^3}\left\{\gamma\alpha\left[(\gamma-1)\alpha\mu_t + 2\right] + \frac{2\left[(\gamma+1)\alpha\mu_t - 1\right](1-\alpha\mu_t)}{1-\mu_t}\right\} \tag{50}$$

$$\omega_{11} \equiv -\frac{\gamma^2\alpha\mu_t\left[\alpha\mu_t(1-\alpha\mu_t) - 3\right]}{(1-\alpha\mu_t)^4} \tag{51}$$

$$\omega_{12} \equiv -\frac{\gamma^2\alpha^2\mu_t^2}{(1-\alpha\mu_t)^4} \tag{52}$$

$$\omega_{13} \equiv \frac{\gamma^2\alpha\mu_t\left[1-\alpha\mu_t(1-\alpha\mu_t)\right]}{(1-\alpha\mu_t)^4} \tag{53}$$

$$\omega_{14} \equiv -\frac{\gamma\alpha^2\mu_t\mu_{t-1}\left[(\gamma+1)\alpha\mu_t+\gamma-1\right]}{(1-\alpha\mu_t)^4} \tag{54}$$

$$\omega_{15} \equiv -\frac{\gamma\alpha\mu_t^2}{(1-\alpha\mu_t)^4}\left\{\alpha\left[(\gamma+1)\alpha\mu_t-1\right]-\frac{(1-\alpha\mu_t)^2}{1-\mu_t}\right\} \tag{55}$$

$$\omega_{16} \equiv \frac{\gamma^2\alpha\mu_{t-1}\left[\alpha\mu_t(1+\alpha\mu_t)-1\right]}{(1-\alpha\mu_t)^4} \tag{56}$$

$$\omega_{17} \equiv -\frac{\gamma\mu_t}{(1-\alpha\mu_t)^4}\left\{\alpha\left[1+\alpha\mu_t\left((\gamma-1)\alpha^2\mu_t^2-(\gamma-2)(1+\alpha\mu_t)\right)\right]+\frac{\left[1-\alpha\mu_t(1-\alpha\mu_t)\right](1-\alpha\mu_t)}{1-\mu_t}\right\} \tag{57}$$

$$\omega_{18} \equiv -\frac{\gamma^2\alpha^2\mu_t\mu_{t-1}}{(1-\alpha\mu_t)^4} \tag{58}$$

$$\omega_{19} \equiv -\frac{\gamma\alpha\mu_t}{(1-\alpha\mu_t)^3}\left[1+\gamma\alpha\mu_t-\frac{\mu_t(1-\alpha\mu_t)}{1-\mu_t}\right] \tag{59}$$

$$\omega_{20} \equiv -\frac{\gamma\alpha\mu_t\mu_{t-1}}{(1-\alpha\mu_t)^4}\left\{\alpha\left[(\gamma+1)\alpha\mu_t-1\right]-\frac{(1-\alpha\mu_t)^2}{1-\mu_t}\right\} \tag{60}$$

（40）式は各期成立していることから、長期間を通じて平均すると次のような関係が成り立つ[12)]。

$$\begin{aligned} E\left(r_{t+1}\right) \cong \rho + E\left(\frac{\mu_t}{1-\mu_t}\right) + \psi_1\cdot E\left(g_{c,t}\right) + \psi_2\cdot Var\left(g_{c,t}\right) + \psi_3\cdot E\left(g_{\mu,t}\right) + \psi_4\cdot Var\left(g_{\mu,t}\right) \\ + \psi_5\cdot Cov\left(g_{c,t}, g_{\mu,t}\right) \qquad for\ \ t\in[0,\infty) \end{aligned} \tag{61}$$

ただし、

$$\psi_1 \equiv E(\omega_1)+E(\omega_2)+E(\omega_3) \tag{62}$$

$$\psi_2 \equiv E(\omega_4)+E(\omega_5)+E(\omega_6) \tag{63}$$

$$\psi_3 \equiv E(\omega_7)+E(\omega_8) \tag{64}$$

$$\psi_4 \equiv E(\omega_9)+E(\omega_{10}) \tag{65}$$

$$\psi_5 \equiv E(\omega_{14})+E(\omega_{15})+E(\omega_{16})+E(\omega_{17})+E(\omega_{18})+E(\omega_{19}) \tag{66}$$

この（61）式の関係は長期にわたる実質資産収益率の決定メカニズムを表している。（61）式では、条件付き期待値ではなく、非条件付き期待値で定義されていることに注意されたい。

なお、資産収益率が消費成長率や資本不良度変化率と各々相関する場合、（40）式および（61）式と同様の導出方法[13)]を用いると、長期的には下記の関係が成立する。

$$
\begin{aligned}
E(r_{t+1}) \cong \rho + E\left(\frac{\mu_t}{1-\mu_t}\right) &+ \psi_1 \cdot \left[E(g_{c,t}) + Cov(r_{t+1}, g_{c,t})\right] + \psi_2 \cdot Var(g_{c,t}) \\
&+ \psi_3 \cdot \left[E(g_{\mu,t}) + Cov(r_{t+1}, g_{\mu,t})\right] + \psi_4 \cdot Var(g_{\mu,t}) \\
&+ \psi_5 \cdot Cov(g_{c,t}, g_{\mu,t}) \qquad for \;\; t \in [0, \infty)
\end{aligned} \tag{67}
$$

３．安全利子率、および、リスク・プレミアムの決定メカニズム

本節では、前節で導出した実質資産収益率の決定式に基づいて、安全利子率およびリスク・プレミアムの決定式を導出する。

まずは安全利子率、すなわち、安全資産の収益率についてその決定メカニズムをみていこう。安全資産の実質収益率 $r_{f,t+1}$ について、オイラー方程式（35）式を次のように書き直すことができる。

$$
(1 + r_{f,t+1}) \cdot E_t\left\{\beta\left(\frac{X_{t+1}^{-\gamma} - \alpha\beta \cdot \mu_{t+1} \cdot X_{t+2}^{-\gamma}}{X_t^{-\gamma} - \alpha\beta \cdot \mu_t \cdot X_{t+1}^{-\gamma}}\right)(1 - \mu_{t+1}) \middle| \Omega_t\right\} = 1 \quad for \;\; t \in [0, \infty) \tag{68}
$$

（61）式より、安全資産収益率に関するオイラー方程式（68）式について、

$$
\begin{aligned}
E(r_{f,t+1}) \cong \rho + E\left(\frac{\mu_t}{1-\mu_t}\right) &+ \psi_1 \cdot E(g_{c,t}) + \psi_2 \cdot Var(g_{c,t}) + \psi_3 \cdot E(g_{\mu,t}) + \psi_4 \cdot Var(g_{\mu,t}) \\
&+ \psi_5 \cdot Cov(g_{c,t}, g_{\mu,t}) \qquad for \;\; t \in [0, \infty)
\end{aligned} \tag{69}
$$

という関係が成り立つ。この関係は長期にわたる実質安全利子率の決定メカニズムを表している。

次に、リスク・プレミアムの決定メカニズムについてみていこう。リスク・プレミアムの決定式を導出するために、危険資産を代表させる意味で株式市場全体の平均収益率、いわゆる、マーケット・ポートフォリオ収益率の決定式を導出しよう。マーケット・ポートフォリオの実質収益率 $r_{m,t+1}$ について、オイラー方程式（35）式を次のように書き直すことができる。

$$
E_t\left\{\beta\left(\frac{X_{t+1}^{-\gamma} - \alpha\beta \cdot \mu_{t+1} \cdot X_{t+2}^{-\gamma}}{X_t^{-\gamma} - \alpha\beta \cdot \mu_t \cdot X_{t+1}^{-\gamma}}\right)(1 - \mu_{t+1})(1 + r_{m,t+1}) \middle| \Omega_t\right\} = 1 \quad for \;\; t \in [0, \infty) \tag{70}
$$

マーケット・ポートフォリオ収益率はマクロ経済と広く相互に影響し合うと考えられるため、消費成長率や資本不良度変化率と各々相関するとしよう。このとき、（67）式より、マーケット・ポートフォリオ収益率に関するオイラー方程式（70）式について、

$$
\begin{aligned}
E(r_{m,t+1}) \cong \rho + E\left(\frac{\mu_t}{1-\mu_t}\right) &+ \psi_1 \cdot \left[E(g_{c,t}) + Cov(r_{m,t+1}, g_{c,t})\right] + \psi_2 \cdot Var(g_{c,t}) \\
&+ \psi_3 \cdot \left[E(g_{\mu,t}) + Cov(r_{m,t+1}, g_{\mu,t})\right] + \psi_4 \cdot Var(g_{\mu,t}) \\
&+ \psi_5 \cdot Cov(g_{c,t}, g_{\mu,t}) \qquad for \;\; t \in [0, \infty)
\end{aligned} \tag{71}
$$

という関係が成り立つ。この関係は長期にわたるマーケット・ポートフォリオ収益率の決定メカニズムを表している。

リスク・プレミアムとは、危険資産の安全資産に対する期待超過収益率である。ここでのリスク・プレミアムは、マーケット・ポートフォリオ収益率と安全利子率の差として定式化される。よって、マーケット・ポートフォリオ収益率の決定式（71）式の各辺から、安全利子率の決定式（69）式の各辺を引くと、

$$E\left(r_{m,t+1}\right)-E\left(r_{f,t+1}\right)\cong\psi_1\cdot Cov\left(r_{m,t+1},g_{c,t}\right)+\psi_3\cdot Cov\left(r_{m,t+1},g_{\mu,t}\right)\qquad for\ \ t\in[0,\infty)\tag{72}$$

が得られる。この関係はリスク・プレミアムの決定メカニズムを表している。

これらの式は、本稿のモデルが安全利子率パズル（risk-free rate puzzle）や、リスク・プレミアム・パズル［エクイティ・プレミアム・パズル（equity premium puzzle)］を解消し得るかについて検証するために用いられる。

Ⅳ．数値計算による資産価格決定モデルに関するパズルの検証

本節では、不良資本の逆厚生効果および習慣形成効果を考慮した C-CAPM について、選好パラメータの数値計算を行うことによって、安全利子率パズルおよびリスク・プレミアム・パズルがどの程度解消され得るか、という問題を考察する。

１．データについて

本節では、日本における消費成長率、資産収益率、および資本不良度のデータについて説明する。これらのデータから得られる標本統計量は、次節以降において安全利子率パズルおよびリスク・プレミアム・パズルを検証するために用いられる。本分析において使用される標本統計量は、次の表 1 にまとめられている。標本期間は、1981 年～2008 年（暦年）である [14)]。

表 1．標本統計量一覧：1981 年～2008 年

$E(g_c)$	0.01882
$Var(g_c)$	0.00019
$E(\mu)$	0.26667
$E(g_\mu)$	0.01852
$Var(g_\mu)$	0.08429
$Cov(g_c,g_\mu)$	−0.00087
$E(r_f)$	0.02056
$E(r_m)$	0.07678
$Var(r_m)$	0.04056
$Cov(r_m,g_c)$	0.00099
$Cov(r_m,g_\mu)$	−0.02155

データの出所については、次の通りである。家計消費データは、『国民経済計算年報（2009 年度版）』（内閣府）における実質非耐久財消費および実質サービス消費の合計系列を使用した。実質変数の使用に当たって、連鎖方式・2000 暦年連鎖価格の確報値を採用した。

資産収益率については、次の系列を用いた。マーケット・ポートフォリオ収益率（r_m）の名目系列は、『株式投資収益率 2009 年（CD-ROM）』（日本証券経済研究所）における東証第一部市場収益率の加重平均を用いた。安全利子率（r_f）の名目系列については、景気動向指数（内閣府）の先行指標である長短金利差を計算する際に用いられる短期金利 [15] を利用した。以上の資産収益率はいずれも、『物価統計月報（消費者物価指数編）』（総務省統計局）所収の消費者物価指数（全国、生鮮食品を除く総合）で計算されたインフレ率を減ずることで実質化されている。

資本不良度 μ_t については、次のような代理変数を用いた。森澤（2010）における全産業・全規模の過剰債務の推計値を利用して、

$\mu_t =$ 過剰債務 /（ 短期借入金 + 長期借入金 + 社債 ）

という定義に基づいて、資本不良度系列のデータを作成した [16]。次節以降での各パズルの検証に当たって、μ_t についてはその平均値が用いられる。

２．安全利子率パズルの検証

森澤（2012*a*）では、標準モデルにおける安全利子率の決定式

$$E\left(r_{f,t+1}\right) \cong \rho + \gamma \cdot E\left(g_{c,t+1}\right) - \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} \cdot Var\left(g_{c,t+1}\right) \quad for \ \ t \in [0, \infty)$$

について、表 1 と同じ標本統計量を用いて、平均実質利子率を完全に予測するために選好パラメータが取り得る値を数値計算している。時間選好率を $\rho = 0.010101$（$\beta = 0.99$）と設定すると、$\gamma = 0.557$, 201.701 が得られる。他方、相対的危険回避度を $\gamma = 10$ と設定すると、$\rho = -0.1575$（$\beta = 1.187$）となる。1980～2008 年の日本においても、米国と同様に、標準的な資産価格決定モデルに関する安全利子率パズルの存在が確かめられる。

次に、第Ⅲ.3 節で導出した（69）式が安全利子率パズルを緩和する可能性について検証しよう。本稿のモデルでは、不良資本の逆厚生効果および習慣形成効果が消費に対して与える外部効果度パラメータ α を新たに導入している。ここで、α が取り得る値の範囲について捕捉しておこう。

ω_i や ψ_i を構成している $\alpha\mu_t$ について、（$1-\alpha\mu_t$）> 0 が成り立つためには、$\mu_t \in [0,1)$ のもとで、

$$\alpha \in [0, \mu_t^{-1}) \qquad (73)$$

という条件が必要となる。

ちなみに、（12）式のサービス・フロー X_t が正であるために α が取り得る値の範囲は、$\mu_{t-1} \in [0,1)$ のもとで、

$$\alpha \in [0, (1+g_{c,t}) \cdot \mu_{t-1}^{-1}) \qquad (74)$$

となる。

理論的には時点効用関数の凸性が成り立つために、（74）式の条件が重要となる。ただし、資産価格決定モデルのパズルを検証するためには、ψ_i を計算できればよい。したがって、ここでは、（73）式の条件に基づいて α が取り得る値の範囲を測ったうえで数値計算される。

（73）式における α の上限値を表 1 の E（μ_t）で代替して計算すると、［E（μ_t)］$^{-1}$ = 3.749 となる。そこで、表 1 の標本統計量を代入した（69）式について、この α を 0 から 3.7 まで変化させたときに、ρ や γ がどのように変化するのか、を数値計算によって確かめる。なお、以下掲載の表では、紙面の都合上、α を 0 から 3.6 まで 0.2 ポイントずつ変化させたときの結果を報告する。また、ψ_i の計算に際して、その構成変数 μ_t および μ_{t-1} の代理変数として E（μ_t）を代入する形で近似計算される。

本稿のモデルにおける相対的危険回避度 γ_t は、（33）式で示されているように定数ではない。そこで、以下のパズルの検討に当たっては、相対的危険回避度の平均を次のような近似式

$$\begin{aligned} E(\gamma_t) &= \gamma \cdot E\left(\frac{c_t}{X_t}\right) \\ &\cong \gamma \cdot \left[1 - \alpha \cdot E(\mu_t) \cdot \left(1 + E(g_{c,t+1})\right)^{-1}\right]^{-1} \end{aligned} \qquad (75)$$

によって求め、これを以て相対的危険回避度の水準を測る目処としよう。

表 2. 安全利子率パズル［（69）式：ρ = 0.010101（β = 0.99）と設定した場合］

α	γ_1	$E(\gamma_{1,t})$	γ_2	$E(\gamma_{2,t})$
0.00	224.005	224.005	−18.194	−18.194
0.20	72.497	76.502	−15.880	−16.758
0.40	29.687	33.159	−11.864	−13.252
0.60	16.201	19.219	−8.483	−10.064
0.80	10.252	12.967	−6.021	−7.615
1.00	7.017	9.505	−4.270	−5.784
1.20	5.025	7.326	−3.022	−4.405
1.40	3.696	5.834	−2.129	−3.360
1.60	2.761	4.750	−1.479	−2.545
1.80	2.076	3.926	−1.011	−1.912
2.00	1.566	3.286	−0.674	−1.414
2.20	1.177	2.775	−0.433	−1.022
2.40	0.878	2.362	−0.265	−0.714
2.60	0.647	2.027	−0.152	−0.475
2.80	0.469	1.755	−0.078	−0.293
3.00	0.331	1.541	−0.034	−0.160
3.20	0.224	1.381	−0.011	−0.070
3.40	0.141	1.280	−0.0021	−0.019
3.60	0.074	1.277	−4E−05	−0.001

表 2 は、(69) 式において $\rho = 0.010101$ ($\beta = 0.99$) と設定したときに、表 1 の標本統計量を用いて平均安全利子率を完全に予測し得る γ および E (γ_t) の計算結果である。以下では、得られた γ の値のうち、負値は符号条件を満たしていないため、正値について検討していく。$\alpha = 0$ のとき、E (γ_t) = 224 と相当過大な正値になっているものの、α の値が大きく与えられるにつれ、徐々に γ の値は下がっている。そして、上限近くの $\alpha = 3.6$ のとき、E (γ_t) = 1.277 と現実的に妥当と考えられる値に近づいている。

表 3. 安全利子率パズル [(69) 式 : E (γ_t) = 2 と設定した場合]

α	γ [$E(\gamma_t)$=2]	ρ	β
0.00	2.000	−0.404	1.679
0.20	1.895	−0.393	1.647
0.40	1.791	−0.389	1.636
0.60	1.686	−0.385	1.626
0.80	1.581	−0.382	1.618
1.00	1.477	−0.379	1.610
1.20	1.372	−0.375	1.600
1.40	1.267	−0.370	1.588
1.60	1.162	−0.363	1.569
1.80	1.058	−0.351	1.540
2.00	0.953	−0.327	1.486
2.20	0.848	−0.282	1.392
2.40	0.744	−0.193	1.240
2.60	0.639	−0.013	1.014
2.80	0.534	0.375	0.727
3.00	0.430	1.304	0.434
3.20	0.325	3.971	0.201
3.40	0.220	14.970	0.063
3.60	0.115	143.351	0.007

表 3 は、E (γ_t) = 2 と設定したときに、(69) 式において表 1 の標本統計量を用いて平均安全利子率を完全に予測し得る ρ (β) の計算結果である。なお、この場合の γ については (75) 式に基づき次の近似式

$$\gamma \cong 2 \cdot \left[1 - \alpha \cdot E(\mu_t) \cdot \left(1 + E(g_{c,t+1})\right)^{-1}\right] \tag{76}$$

によって計算されている。

$\alpha = 0$ のとき、$\rho =$ −0.404 ($\beta = 1.679$) と相当過大な負値になっているものの、α の値が大きく与えられていくにつれ、徐々に ρ の値も上がっている。ただし、$\alpha = 2.625$ のときに $\rho = 0.01$ ($\beta = 0.99$) [表 3 では未掲載] となって以降の ρ の計算結果は、かなり過大な正値になってしまう。

表 2 と表 3 の結果から判断すると、不良資本の逆厚生効果および習慣形成効果が機能する場合、1980～2008 年の日本において、本稿のモデルは標準モデルと比較して、安全利子率パズルを解消

する可能性があると考えられる。

３．リスク・プレミアム・パズルの検証

安全利子率の場合と同様に、森澤（2012a）では、標準モデルにおけるリスク・プレミアムの決定式

$$E(r_{m,t+1}) - E(r_{f,t+1}) \cong \gamma \cdot Cov(r_{m,t+1}, g_{c,t+1}) \quad for \ \ t \in [0, \infty)$$

について、リスク・プレミアムを完全に予測するために取り得る相対的危険回避度の値を、表 1 と同じ標本統計量を用いて、γ = 56.996 と計算している。1980～2008 年の日本においても、米国と同様に、標準的な資産価格決定モデルに関するリスク・プレミアム・パズルの存在が確かめられる。

表 4. リスク・プレミアム・パズル［(72) 式］

α	γ	$E(\gamma_t)$
0.00	65.314	65.314
0.20	24.576	25.934
0.40	14.088	15.735
0.60	9.066	10.755
0.80	6.207	7.851
1.00	4.412	5.976
1.20	3.211	4.681
1.40	2.372	3.744
1.60	1.767	3.041
1.80	1.321	2.499
2.00	0.987	2.072
2.20	0.733	1.729
2.40	0.539	1.449
2.60	0.389	1.217
2.80	0.273	1.021
3.00	0.183	0.854
3.20	0.115	0.705
3.40	0.062	0.564
3.60	0.023	0.392

次に、第Ⅲ.3 節で導出した（72）式がリスク・プレミアム・パズルを緩和する可能性について検証しよう。表 1 の標本統計量を代入した（72）式について、先述の安全利子率パズルの検証と同様に、外部効果度パラメータ α を変化させたときに、γ および E（γ_t）がどのように変化するのか、を数値計算によって確かめる。

表 4 は、このときの γ および E（γ_t）の計算結果である。$\alpha = 0$ のとき、E（γ_t） $= 65$ と相当過大な正値になっているものの、α の値が大きく与えられていくにつれ、徐々に γ の値は下がってい

く。そして、$\alpha = 0.7$ のときに E（γ_t） $= 9.131$（$\gamma = 7.458$）［表 4 では未掲載］と計算されて以降の計算結果は、かなり現実的に妥当と考えられる値に落ち着いている。表 4 の結果から判断すると、不良資本の逆厚生効果および習慣形成効果が機能する場合、1980～2008 年の日本において、本稿のモデルは標準モデルと比較して、リスク・プレミアム・パズルを解消する可能性があると考えられる。

V．おわりに

本稿では、不良資本の逆厚生効果および習慣形成効果を同時に考慮したモデルを定式化した。そして、このモデルが安全利子率パズルやリスク・プレミアム・パズルを解消し得る可能性について分析を行った。不良資本の逆厚生効果や習慣形成効果がかなりの程度、家計効用に対して作用する場合、本稿のモデルは安全利子率パズル、および、リスク・プレミアム・パズルを解消する可能性がある。

ただし、本稿の分析には、いくつかの課題が残されている。最後にこの点を付記しておきたい。まず、不良資本の逆厚生効果や習慣形成効果が現実的にどの程度、機能しているのかについては、本稿では明らかになっていない。この点については、本稿のモデルについて実証分析を行うことが必要である。また、本稿では 1980～2008 年の日本において、本稿のモデルが実際に資産価格モデルのパズルを解消する可能性を示すことにはある程度成功しているが、他国のケースやより長期的なデータに関する分析は行われていない。このモデルのパズル解消力に関する頑健性を検討することが必要である。

引用文献、注

1） 本稿のように有効資本を定義している先行研究に脇田（2007）がある。ただし、脇田（2007）は μ_t を単に「過剰融資、あるいは不良債権比率」ととらえているのに対して、本稿では生産側情報に基づく C-CAPM に不良債権・過剰債務を組み込むという意図のもとで、本節で展開しているような「資本の不良化」というアイデアを提示している。このアイデアの詳細については、森澤（2011*a*）を参照されたい。

2） t 期における状態 s_t ごとの確率変数 x_t は

$$x_t \equiv x_t(s_t)$$

を意味し、本来は x_t（s_t）と表記するべきである。ただし本稿では、特に状態 s_t を明記する必要がない限りは、その定式化の表現が煩雑になるのを防ぐために、x_t と表記する。

3） ここでは特に、確率変数 N_t が状態 s_t に依存しないことを明記する必要があるため、（8）式左辺の確率変数を N_t（s_t）と表記する。

4） この効果は消費に対する負の外部効果の一種として定式化されていることから、「不良資本の外部（不経済）効果」と呼んだ方が素直な表現であるように思われる。ただし、本稿ではこの効果と同時に「習慣形成効果」を考慮しており、いずれの効果も定式化上、消費の外部性［齊藤誠（2007, p.53)］の一種であ

ることから、表現上の混同を避けるために一先ずはこれまでの拙稿で用いてきた通り、この効果を「不良資本の逆厚生効果」と呼ぶことにする。

5） Campbell, Lo and MacKinlay（1997, p.327）、および、Campbell（2003, p.866）より引用した。

6） 消費の外部性［齊藤誠（2007, p.53）］を z_t として、u（$c_t - z_t$）のように z_t を導入したモデルを「差分型モデル（difference model）」、u（c_t / z_t）のように z_t を導入したモデルを「比率型モデル（ratio model）」と呼ぶ。差分型モデルの先行研究には、Sundaresan（1989）や Constantinides（1990）などがある。比率型モデルの先行研究には、Abel（1990）がある。ここで差分型モデルを採用したのは、不良資本の逆厚生効果モデルとの親和性ゆえである。差分型および比率型の両モデルの違いに関する詳細は、Campbell, Lo and MacKinlay（1997, §8.4.1）や Campbell（2003, §5.1）を参照されたい。

7） 第Ⅱ.2 節までは、表記の煩雑化を避けるために、状態 s_t ごとの確率変数 x を x_t（s_t）と表記せず、簡略化した x_t で表記していた。本節では、期待効用の最適化問題を分析するため、特に状態 s_t を明記した x_t（s_t）で確率変数 x を表記する。

8） 定常均衡のもとでは、人口成長率は一定であり、かつ、家計保有資産である資本の均衡実質収益率は資本の純限界生産性に等しくなる。Barro and Sala-i-Martin（2004, §2.2）を参照されたい。

9） 相対的危険回避度に関する詳細は齊藤（2006, §3.6.1）を、参照されたい。相対的慎重度に関する詳細は、Kimball（1990）および齊藤（2006, §3.6.4）を参照されたい。なお、relative prudence の訳語として、Romer（2006）の堀・岩成・南條訳（2010）では「相対的慎重度」、齊藤（2006）では「相対的プルーデンス」が採用されている。また、相対的慎重度に関して、予備的貯蓄と効用関数の形状（3 階の導関数）との関係については、Romer（2006, §7.6）の説明がわかりやすく有用である。

10） （40）式の導出にあたって、r_{t+1}（s_{t+1}）, ρ については原点周りで 1 次の展開、$g_{c,t}$（s_t）, $g_{c,t+1}$（s_{t+1}）, $g_{c,t+2}$（s_{t+2}）については原点周りで 2 次の展開、μ_{t-1}（s_{t-1}）, μ_{t+1}（s_{t+1}）については μ_t（s_t）の周りで 2 次の展開を行っている。なお、この導出に当たって、齊藤（2006, 第 3 章）や Romer（2006, §7.5）における導出過程を参考にしている。

11） （40）式の導出に当たっては、次の関係を仮定している。① $\left[E_t\left(g_x|\Omega_t\right)\right]^2 \cong 0$ と仮定して、$E_t\left[g_x^2|\Omega_t\right]$ を $Var_t\left(g_x|\Omega_t\right)$ に置き換えている。② $E_t\left(g_x|\Omega_t\right)\cdot E_t\left(g_y|\Omega_t\right) \cong 0$ と仮定し、$E_t\left(g_x \cdot g_y|\Omega_t\right)$ を $Cov_t\left(g_x, g_y|\Omega_t\right)$ に置き換えている。同様の導出方法を用いている文献として、齊藤（2006, p.124n）を参照されたい。

12） （61）式の導出に当たっては、①成長率 $g_{x,t}$ について長期的には弱定常性が成り立つ（要するに、平均および分散が一定、かつ、$Cov\left(g_{x,t+i}, g_{x,t+j}\right) = 0 \quad for \quad i \neq j$ が成り立つ）、② ω_i（$i = 1,2,\ldots,20$）と任意の $E_t\left(X|\Omega_t\right)$ は統計的に独立である（要するに、$E\left[\omega_i \cdot E_t\left(X|\Omega_t\right)\right] = E\left(\omega_i\right)\cdot E\left(X\right)$ が成り立つ）、と仮定している。

13） この場合、r_{t+1}（s_{t+1}）については原点周りで 2 次のテイラー展開を行っている。また、$E_t\left(r|\Omega_t\right)\cdot E_t\left(g_x|\Omega_t\right) \cong 0$ と仮定し、$E_t\left(r \cdot g_x|\Omega_t\right)$ を $Cov_t\left(r, g_x|\Omega_t\right)$ に置き換えている。同様の導出方法を用いている文献として、齊藤（2006, p.143n）を参照されたい。

14） このデータセットは森澤（2012*a*）のそれと同様である。なお、家計消費データについて、93SNA データを用いている。最も過去に遡及できる 93SNA データは 1980 年の系列である。このため、標本期間は 1980 年以降と設定している。

15） 内閣府 HP の「個別系列の概要」（http://www.esri.cao.go.jp/jp/stat/di/kobetu_gaiyou.pdf）によると、TIBOR（3 か月）ユーロ円金利（全国銀行協会）を採用しているとのことである。景気動向指数に関する詳細は、内閣府の景気動向指数 HP（http://www.esri.cao.go.jp/jp/stat/di/menu_di.html）を参照されたい。また、資産価格モデルの分析では、安全利子率として、FB レートを用いる方が多いのだが、手元で使用可能なデー

タセットで FB レートを入手できなかったため、上記の系列で代用した。ちなみに、1981～2008 年の平均実質コールレートは約 1.7%であり、日本におけるこの期間の平均実質短期利子率はおよそ 2%とみなしてよいと考えられる。

16）過剰債務系列については、森澤（2010, §Ⅴ.2）の系列を用いた。過剰債務系列作成の詳細については、森澤（2010）を参照されたい。

参考文献

北村行伸・藤木裕（1997)、「サプライ・サイド情報を利用した消費に基づく資本資産価格モデルの推計」、『金融研究』（日本銀行金融研究所)、第 16 巻第 4 号、pp.137-154。

齊藤誠（2006)、『新しいマクロ経済学（新版)』、有斐閣。

齊藤誠（2007)、『資産価格とマクロ経済』、日本経済新聞出版社。

森澤龍也（2010)、「日本における過剰債務の推計と分析―『法人企業統計季報』による各種推計の比較検証―」『流通科学大学論集　経済・経営情報編』、第 18 巻第 2 号、pp.53-77。

森澤龍也（2011*a*)、「資本の不良化と資産価格付け―生産側情報を利用した C-CAPM による考察―」、『流通科学大学論集　経済・経営情報編』、第 19 巻第 2 号、pp.1-12。

森澤龍也（2011*b*)、「不良資本の逆厚生効果と資産価格付け―生産側情報を利用した C-CAPM による考察―」、『流通科学大学論集　経済・情報・政策編』、第 20 巻第 1 号、pp.1-15。

森澤龍也（2012*a*)、「資本の不良化と資産価格決定モデルのパズル―安全利子率パズル、リスク・プレミアム・パズル再考―」、『流通科学大学論集　経済・情報・政策編』、第 20 巻第 2 号、pp.1-24。

森澤龍也（2012*b*)、「資本の不良化を考慮した C-CAPM の推計」、『経済学論究』（関西学院大学)、第 66 巻第 1 号、掲載予定。

脇田成（2007)、「不良債権処理のマクロ的インパクト　失われた 10 年第三の仮説」、景気日付研究会沼津コンファレンス発表論文。

Abel, A. B.（1990）, "Asset Prices under Habit Formation and Catching up with the Joneses," *American Economic Review* 80, pp.38-42.

Arrow, K. J.（1951）, "Alternative Approaches to the Theory of Choice in Risk-Taking Situations," *Econometrica* 19, pp.404-437.

Barro, R. J. and X. Sala-i-Martin（2004）, *Economic Growth*, 2nd ed., MIT Press.［（邦訳）大住圭介訳（2006）『内生的経済成長論（第 2 版）Ⅰ・Ⅱ』、九州大学出版会。］

Campbell, J. Y.（2003）, "Consumption-Based Asset Pricing," in G. M. Constantinides, M. Harris and R. M. Stultz eds., *Handbook of the Economics of Finance*, vol. 1B, Chapter 13, Elsevier B. V., pp.803-887.［（邦訳）木村俊夫訳（2006)、「消費型資産価格理論」、加藤英明監訳『金融経済学ハンドブック 2　金融市場と資産価格』第 13 章、丸善、pp.861-944。］

Campbell, J. Y., A. W. Lo and A. C. MacKinlay（1997）, *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press. ［（邦訳）祝迫得夫・大橋和彦・中村信弘・本多俊毅・和田賢治訳（2003)、『ファイナンスのための計量分析』、共立出版。］

Constantinides, G.（1990）, "Habit Formation: a Resolution of the Equity Premium Puzzle," *Journal of Political Economy* 98, pp.519-543.

Duesenberry, J. S.（1949）, *Income, Saving and the Theory of Consumer Behavior*, Harvard University Press. ［（邦訳）大熊一郎訳（1955）、『所得・貯蓄・消費者行為の理論』、巌松堂書店。］

Heaton, J.（1995）, “An Empirical Investigation of Asset Pricing with Temporally Dependent Preference Specifications,” *Econometrica* 63, pp.681-717.

Kimball, M. S.（1990）, “Precautionary Saving in the Small and in the Large,” *Econometrica* 58, pp.53-73.

Mehra, R. and E. C. Prescott（1985）, “The Equity Premium: A Puzzle,” *Journal of Monetary Economics* 15, pp.145-161.

Modigliani, F.（1949）, “Fluctuations in the Saving-Income Ratio: A Problem in Economic Forecasting,” *Studies in Income and Wealth*, No.11, National Bureau of Economic Research.

Pratt, J. W.（1964）, “Risk Aversion in the Small and in the Large,” *Econometrica* 32, pp.122-136.

Romer, D.（2006）, *Advanced Macroeconomics*, 3rd ed., McGraw-Hill.［（邦訳）堀雅博・岩成博夫・南條隆訳（2010）、『上級マクロ経済学（第 3 版）』、日本評論社。］

Sundaresan, S. M.（1989）, “Intertemporally Dependent Preferences and the Volatility of Consumption and Wealth,” *Review of Financial Studies* 2, pp.73-88.

Weil, P.（1989）, “The Equity Premium Puzzle and the Risk-Free Rate Puzzle,” *Journal of Monetary Economics* 24, pp.401-421.