流通科学大学論集—経済・情報・政策編—第 21 巻第 1 号，49-55（2012）

連結ピン型組織構造の階層間関係追加問題
— 総頂点間短縮経路長の定式化 —

A Problem of Adding Relation between Two Levels of a Linking Pin Organization Structure
— Formulation of Total Shortening Path Length —

澤田　清 *
Kiyoshi Sawada

本論文では、高さ H の完全 2 分木の全兄弟が隣接化されている完全 2 分木連結ピン型組織構造に対して、組織内の異なる階層のメンバー間に関係を追加する問題を考えた。ここでは、深さ M の頂点と、その子孫である深さ N の頂点との間に 1 辺を追加する場合に、完全 2 分木連結ピン型組織構造の全頂点対の最短経路の短縮長を合計した総頂点間短縮経路長を定式化し、数値例により総頂点間短縮経路長を最大にする深さの対 $(M, N)^*$ を求めた。

キーワード： 連結ピン型組織構造、情報伝達、完全 2 分木、総頂点間短縮経路長、関係追加

I.　はじめに

連結ピン型組織構造は、上下間の一元的な命令系統に基づくピラミッド組織構造に部門内の横方向の協力関係を付加したものであり、Likert[1)]の組織分類ではシステム 4 と呼ばれている。ピラミッド組織構造は、構成メンバーを頂点に、上下のメンバー間関係を辺に対応させると、根付き木である[2)]。また、連結ピン型組織構造は、根付き木の兄弟（同じ親を持つ頂点）を隣接化した構造として表すことができる。このとき、各頂点間の経路は組織内のメンバー間の関係をたどる情報伝達経路に対応している。また、これらの組織構造に辺を追加することは、組織にあらかじめ設定されたメンバー間関係以外の追加的関係の形成に相当する。

筆者らは、すでに、完全 2 分木のピラミッド組織構造および完全 2 分木の全兄弟が隣接化されている連結ピン型組織構造を対象として、同じ階層内での 2 つの関係追加問題、すなわち同じ深さの 2 頂点間に辺を 1 本追加する問題および同じ深さの全頂点間に辺を追加する問題について、総頂点間経路長（全頂点間の最短経路長の総和）を最小にする辺の追加位置を解析的に求めた[3),4)]。ここで、完全 2 分木は、すべての葉の深さが同じで、かつすべての内部頂点の子の数が 2 である 2 分木を指す[5)]。また、深さは根からその頂点までの経路長（経路の辺の数）を表す。

また、筆者は、完全 2 分木連結ピン型組織構造に対して、組織のトップである根と深さ $N(N =$

*流通科学大学総合政策学部、〒 651-2188　神戸市西区学園西町 3-1

（2012 年 4 月 6 日受理）

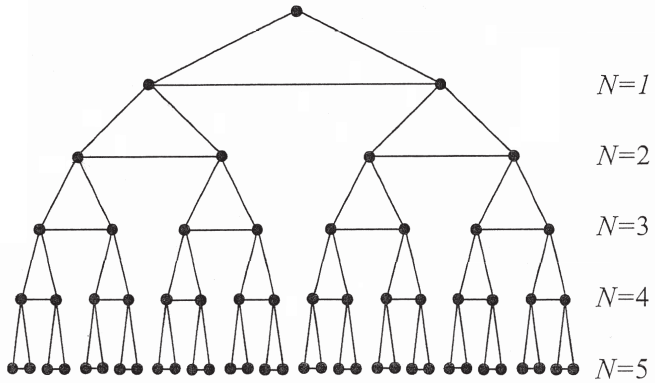

図 1: 完全 2 分木連結ピン型組織構造（$H = 5$）

$2, 3, \ldots, H$) の 1 つの頂点との間に 1 辺を追加する問題を提案した。そこでは、総頂点間経路長を定式化し、これを最小にする辺の追加深さ N^* を数値計算により求めた[6)]。本研究では、高さ $H(H = 2, 3, \ldots)$ の完全 2 分木の全兄弟が隣接化されている完全 2 分木連結ピン型組織構造に対して、深さ $M(M = 0, 1, \ldots, H-2)$ の頂点と、その子孫である深さ $N(N = M+2, M+3, \ldots, H)$ の頂点との間に 1 辺を追加する場合に、総頂点間経路長を最小にする頂点深さの対 $(M, N)^*$ を求めることを考える。ここで扱う辺追加問題は、完全 2 分木連結ピン型組織構造を持つ組織内の直系の上位層（上司）と下位層（部下）との間に追加的な関係形成を行う場合に、どの層とどの層で関係を結ぶのが最も効果的であるかという問題に対応している。図 1 に完全 2 分木連結ピン型組織構造の例（$H = 5$）を示す。

完全 2 分木連結ピン型組織構造の 2 頂点 v_i と $v_j (i, j = 1, 2, \ldots, 2^{H+1} - 1)$ の間の最短経路長を $l_{i,j}$ とすると（ただし $l_{i,j} = l_{j,i}$、$l_{i,i} = 0$）、$\sum_{i<j} l_{i,j}$ は総頂点間経路長を表す。また、上述したような辺追加後の 2 頂点 v_i、v_j 間の最短経路長を $l'_{i,j}$ とすると、$l_{i,j} - l'_{i,j}$ は辺追加により 2 頂点間の最短経路長がどれだけ短縮されたかを表す。ここでは、これを 2 頂点間の短縮経路長と呼ぶ。さらに、全頂点間の短縮経路長の総和 $\sum_{i<j}(l_{i,j} - l'_{i,j})$ を、総頂点間短縮経路長と定義する。ここで、総頂点間短縮経路長を最大にすることは、総頂点間経路長を最小にすることを意味する。

II. で上述した完全 2 分木連結ピン型組織構造への辺追加問題について、総頂点間短縮経路長を定式化し、III. で総頂点間短縮経路長を最大にする最適深さ対 $(M, N)^*$ の数値例を示す。

II. 総頂点間短縮経路長の定式化

辺追加により隣接化される深さ M の頂点と深さ N の頂点をそれぞれ v_M、v_N とし、v_N の子孫の集合を V_1 とする。ただし、子孫はその頂点自身も含む。また、v_M の子孫のうち v_N の親の祖先の集合を V_2 とする。ただし、祖先はその頂点自身も含む。また、v_M の子孫のうち V_1 と V_2 を除

いた頂点の集合を V_3 とする。さらに、完全２分木連結ピン型組織構造の全頂点集合から v_M の子孫を除いた頂点の集合を V_4 とする。

このとき、V_1 の頂点と V_2 の頂点との間の短縮経路長の総和は、

$$A_H(M,N) = W(H-N) \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N-M}{2} \rfloor} (N-M-2i+1) \tag{1}$$

と表される。ただし、$W(h)(h=0,1,2,\ldots)$ は高さ h の完全２分木の頂点数を表す。また、$\lfloor \cdot \rfloor$ は $\cdot$ を超えない最大の整数を表す。次に、V_2 内の頂点間および、V_1 の頂点と V_3 の頂点との間の短縮経路長の総和は、それぞれ、

$$B(M,N) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N-M}{2} \rfloor -1} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-M}{2} \rfloor -i} (N-M-2i-2j+1), \tag{2}$$

$$C_H(M,N) = W(H-N) \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N-M-1}{2} \rfloor} W(H-M-i)(N-M-2i) \tag{3}$$

で与えられる。ただし、$\sum_{i=1}^{0} \cdot = 0$ と定義する。さらに、V_2 の頂点と V_3 の頂点との間および、V_3 内の頂点間の短縮経路長の総和は、それぞれ、

$$\begin{aligned} D_H(M,N) &= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N-M-1}{2} \rfloor -1} W(H-M-i) \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-M-1}{2} \rfloor -i} (N-M-2i-2j) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N-M-1}{2} \rfloor} W(H-N+i-1) \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-M-1}{2} \rfloor -i+1} (N-M-2i-2j+2), \end{aligned} \tag{4}$$

$$E_H(M,N) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N-M}{2} \rfloor -1} W(H-N+i-1) \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-M}{2} \rfloor -i} W(H-M-j)(N-M-2i-2j+1) \tag{5}$$

となる。ただし、$\sum_{i=1}^{-1} \cdot = 0$ と定義する。また、V_1 の頂点と V_4 の頂点との間、V_2 の頂点と V_4 の頂点との間および、V_3 の頂点と V_4 の頂点との間の短縮経路長の総和は、それぞれ、

$$F_H(M,N) = (W(H) - W(H-M))W(H-N)(N-M-1), \tag{6}$$

$$G_H(M,N) = (W(H) - W(H-M)) \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N-M}{2} \rfloor -1} (N-M-2i-1), \tag{7}$$

$$J_H(M,N) = (W(H) - W(H-M)) \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N-M-1}{2} \rfloor} W(H-N+i-1)(N-M-2i) \tag{8}$$

と表される。

以上より、総頂点間短縮経路長 $S_H(M,N)$ は、

$$S_H(M,N) = A_H(M,N)+B(M,N)+C_H(M,N)+D_H(M,N)+E_H(M,N)+F_H(M,N) + G_H(M,N)+J_H(M,N) \tag{9}$$

と定式化される。

III. 数値例

深さ N を $N = M+2L$（ただし、$L=1,2,\dots,\left\lfloor\frac{H-M}{2}\right\rfloor$）と $N = M+2L+1$（ただし、$L=1,2,\dots,\left\lfloor\frac{H-M-1}{2}\right\rfloor$）の 2 通りの場合に分けて計算すると、$S_H(M,N)$ はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned}
&S_H(M,M+2L)\\
&= \left(2^{H-M-2L+1}-1\right)\sum_{i=1}^{L}(2L-2i+1)+\sum_{i=1}^{L-1}\sum_{j=1}^{L-i}(2L-2i-2j+1)\\
&\quad+\left(2^{H-M-2L+1}-1\right)\sum_{i=1}^{L-1}\left(2^{H-M-i+1}-1\right)(2L-2i)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{L-2}\left(2^{H-M-i+1}-1\right)\sum_{j=1}^{L-i-1}(2L-2i-2j)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{L-1}\left(2^{H-M-2L+i}-1\right)\sum_{j=1}^{L-i}(2L-2i-2j+2)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{L-1}\left(2^{H-M-2L+i}-1\right)\sum_{j=1}^{L-i}\left(2^{H-M-j+1}-1\right)(2L-2i-2j+1)\\
&\quad+\left(2^{H+1}-2^{H-M+1}\right)\left(2^{H-M-2L+1}-1\right)(2L-1)+\left(2^{H+1}-2^{H-M+1}\right)\sum_{i=1}^{L-1}(2L-2i-1)\\
&\quad+\left(2^{H+1}-2^{H-M+1}\right)\sum_{i=1}^{L-1}\left(2^{H-M-2L+i}-1\right)(2L-2i)\\
&= 2^{2H-2M-3L+3}-2^{2H-2M-L+2}-3\cdot2^{2H-M-2L+2}+2^{2H-M-L+3}-2^{H-M-2L+1}\\
&\quad-5\cdot2^{H-M-L+1}+2^{H-M+3}-(3L-2)2^{H+1}-L,
\end{aligned} \tag{10}$$

$$
\begin{aligned}
&S_H(M, M+2L+1)\\
&= \left(2^{H-M-2L}-1\right)\sum_{i=1}^{L}(2L-2i+2)+\sum_{i=1}^{L-1}\sum_{j=1}^{L-i}(2L-2i-2j+2)\\
&\quad + \left(2^{H-M-2L}-1\right)\sum_{i=1}^{L}\left(2^{H-M-i+1}-1\right)(2L-2i+1)\\
&\quad + \sum_{i=1}^{L-1}\left(2^{H-M-i+1}-1\right)\sum_{j=1}^{L-i}(2L-2i-2j+1)\\
&\quad + \sum_{i=1}^{L}\left(2^{H-M-2L+i-1}-1\right)\sum_{j=1}^{L-i+1}(2L-2i-2j+3)\\
&\quad + \sum_{i=1}^{L-1}\left(2^{H-M-2L+i-1}-1\right)\sum_{j=1}^{L-i}\left(2^{H-M-j+1}-1\right)(2L-2i-2j+2)\\
&\quad + \left(2^{H+1}-2^{H-M+1}\right)\left(2^{H-M-2L}-1\right)2L+\left(2^{H+1}-2^{H-M+1}\right)\sum_{i=1}^{L-1}(2L-2i)\\
&\quad + \left(2^{H+1}-2^{H-M+1}\right)\sum_{i=1}^{L}\left(2^{H-M-2L+i-1}-1\right)(2L-2i+1)\\
&= \frac{5}{3}\cdot 2^{2H-2M-3L+1}-\frac{5}{3}\cdot 2^{2H-2M-L+1}-3\cdot 2^{2H-M-2L+1}+3\cdot 2^{2H-M-L+1}-2^{H-M-2L+1}\\
&\quad -2^{H-M-L+3}+5\cdot 2^{H-M+1}-3L\cdot 2^{H+1}-2L\,. \qquad (11)
\end{aligned}
$$

表 1 に、$H=2,3,\ldots,20$ の場合について、総頂点間短縮経路長 $S_H(M,N)$ を最大にする辺追加深さ対 $(M,N)^*$ を数値計算により求めた結果を示す。また、$(M,N)^*$ の深さ対に辺を追加したときの総頂点間短縮経路長 $S_H(M,N)^*$ も合わせて示す。

表 1 より、$H=2$ のとき $(M,N)^*=(0,2)$、$H=3$ のとき $(M,N)^*=(0,3)$、$H\geq 4$ のとき $(M,N)^*=(1,4)$ であることがわかる。これは、完全 2 分木連結ピン型組織構造に本問題の関係追加を行うとき、階層数が 4 以上の場合には、階層数にかかわらずトップから 1 番目の階層と 4 番目の階層の間で関係を追加することで組織全体の情報伝達効率を最も改善できることを示している。

IV. おわりに

本研究では、高さ H の完全 2 分木の全兄弟が隣接化されている完全 2 分木連結ピン型組織構造を対象として、組織全体の情報伝達が最も効率的になるように関係を追加する問題を考えた。ここでは、組織内の異なる階層の 2 メンバー間に関係を追加する場合の総頂点間短縮経路長を定式

表 1: 総頂点間短縮経路長を最大にする辺追加深さ対

H	$(M,N)^*$	$S_H(M,N)^*$
2	(0,2)	1
3	(0,3)	10
4	(1,4)	58
5	(1,4)	342
6	(1,4)	1582
7	(1,4)	6750
8	(1,4)	27838
9	(1,4)	113022
10	(1,4)	455422
11	(1,4)	1828350
12	(1,4)	7326718
13	(1,4)	29333502
14	(1,4)	117387262
15	(1,4)	469655550
16	(1,4)	1878835198
17	(1,4)	7515766782
18	(1,4)	30063919102
19	(1,4)	120257380350
20	(1,4)	481032929278

化し、数値例により総頂点間短縮経路長を最大にする階層の対を示した。その結果、組織構造の階層数が 2 のときはトップとトップから 2 番目の階層で、階層数が 3 のときはトップとトップから 3 番目の階層で、階層数が 4 以上の場合にはトップから 1 番目とトップから 4 番目の階層で関係を追加することで組織全体の情報伝達効率を最も改善できることがわかった。最適解に関する数学的な解析については、今後の課題としたい。

参考文献

1) R. Likert, J. G. Likert : New Ways of Managing Conflict, McGraw-Hill, New York (1976).

2) Y. Takahara, M. Mesarovic : Organization Structure: Cybernetic Systems Foundation, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York (2003).

3) K. Sawada, R. Wilson : "Models of adding relations to an organization structure of a complete K-ary tree", *European Journal of Operational Research*, Vol.174, No.3 (2006), pp.1491–1500.

4) K. Sawada : "Adding relations in the same level of a linking pin type organization structure", *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, Vol.38, No.1 (2008), pp.20–25.

5) T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein : Introduction to Algorithms, 2nd ed., MIT Press, Cambridge, Mass. (2001).

6) K. Sawada : "Adding an edge between the root and a node of a complete K-ary linking pin structure maximizing total shortening distance", *International Journal of Recent Trends in Engineering and Technology*, Vol.6, No.1 (2011), pp.25–27.