流通科学大学論集―人間・社会・自然編―第 25 巻第 2 号，121-125（2013）

# ＜資料＞ある２つの半単体複体の同型について

## On Isomorphism of Certain s.s.Complexes

又賀　喜治*

Yoshiharu Mataga

ある２つの半単体複体の同型に関する補題の証明を，（余）半単体複体に備わっている（余）面作用素，（余）退化作用素の間の関係は整った形の結果を与えるという点に注目し，書き出すことを試みた。

キーワード：半単体複体，余半単体複体，写像複体，全空間

## Ⅰ．本資料の目的

$\mathcal{S}$ を半単体複体の圏，$c\mathcal{S}$ を余半単体複体の圏とする（半単体複体については May[1] を，余半単体複体については Bousfield,Kan[2] Ch. X を参照する）。図式

(1.1) $$X \xrightarrow{\ f\ } B \xleftarrow{\ g\ } Y \quad \in \mathcal{S}$$

が与えられたとき，$X \underset{\sim}{\times}_B Y \in c\mathcal{S}$ が次により構成される [2)Ch.X,§2]。

$$(X \underset{\sim}{\times}_B Y)^q = X \times \overbrace{B \times \cdots \times B}^{q\text{ 個の }B} \times Y$$

$$d^i(x, b_1, \cdots, b_q, y) = \begin{cases} (x, f(x), b_1, \cdots, b_q, y) & (i = 0) \\ (x, b_1, \cdots, b_i, b_i, \cdots, b_q, y) & (1 \leqq i \leqq q) \\ (x, b_1, \cdots, b_q, g(y), y) & (i = q + 1) \end{cases}$$

$$s^i(x, b_1, \cdots, b_q, y) = (x, b_1, \cdots, b_i, b_{i+2}, \cdots, b_q, y) \quad (0 \leqq i \leqq q - 1)$$

$\underset{\sim}{\Delta}$ を，余次元 $n$ の半単体複体として，$n$ 次元標準半単体複体 $\Delta[n]$ をもつ余半単体複体とする。以下で $\Delta_n$ は $\Delta[n]$ の非退化 $n$ 単体を表す。本資料の目的は，$X \underset{\sim}{\times}_B Y$ の全空間 $\hom(\underset{\sim}{\Delta}, X \underset{\sim}{\times}_B Y)$ が半単体複体としてよりわかりやすい形に表わされる，という補題の証明を試みることである。問題を説明する。図式 (1.1) より次の図式 (1.2) を構成することができる：

(1.2) $$X \xrightarrow{\ f\ } B \xleftarrow{\hom(\delta^0, B)} \hom(\Delta[1], B) \xrightarrow{\hom(\delta^1, B)} B \xleftarrow{\ g\ } Y \quad \in \mathcal{S}$$

ここで，$\delta^i : \Delta[0] \to \Delta[1] \in \mathcal{S}$ $(i = 0, 1)$ は，$\delta^i(\Delta_0) = \partial_i \Delta_1$ により定義される写像である。図式 (1.2) より半単体複体 $X \times_B \hom(\Delta[1], B) \times_B Y$ が

*流通科学大学商学部、〒 651-2188　神戸市西区学園西町 3-1

（2012 年 9 月 5 日受理）

$$(X \times_B \hom(\Delta[1], B) \times_B Y)_n = \{(x, \beta, y) \in (X \times \hom(\Delta[1], B) \times Y)_n$$
$$\mid \hom(\delta^0, B)(\beta) = f(x),\ \hom(\delta^1, B)(\beta) = g(y)\}$$

により構成される。Bousfield, Kan[2)]Ch. X, §3 (iii) には，次の補題の同型が，それが成り立つことは容易に証明されるとして，記載されている。

**補題** $\qquad \hom(\underset{\sim}{\Delta}, X \underset{\sim}{\times}_B Y) \cong X \times_B \hom(\Delta[1], B) \times_B Y \quad \in \mathcal{S}$

筆者には，証明は初等的になされるであろうが，容易であることが明らかであるとは直感的に捉えることができなかった。そのため書き出してみる必要を感じた。証明を試みた結果を資料として掲載させていただく。同型であることの証明には、写像を構成し，その写像および逆写像が半単体複体としての写像であるところまで書く必要があるが，ここでは全単射の写像が構成されるところまでにとどめる。

## Ⅱ．写像の構成

$h \in \hom(\underset{\sim}{\Delta}, X \underset{\sim}{\times}_B Y)_n$ を $n$ 単体とする。このとき，$h$ から

(2.1) $\qquad h^1 : \Delta[n] \times \Delta[1] \longrightarrow (X \underset{\sim}{\times}_B Y)^1 = X \times B \times Y$

(2.2) $\qquad h^0 : \Delta[n] \times \Delta[0] \longrightarrow (X \underset{\sim}{\times}_B Y)^0 = X \times Y$

および $c\mathcal{S}$ の対象として要請される次の可換な図式 (2.3)，(2.4) が得られる。

(2.3)
$$\begin{tikzcd} \Delta[n] \times \Delta[1] \arrow[r, "h^1"] \arrow[d, "s^0"'] & X \times B \times Y \arrow[d, "s^0"] \\ \Delta[n] \times \Delta[0] \arrow[r, "h^0"] & X \times Y \end{tikzcd}$$

(2.4)
$$\begin{tikzcd} \Delta[n] \times \Delta[1] \arrow[r, "h^1"] & X \times B \times Y \\ \Delta[n] \times \Delta[0] \arrow[r, "h^0"] \arrow[u, "d^k"] & X \times Y \arrow[u, "d^k"'] \end{tikzcd}$$

ただし，(2.4) においては $k = 0, 1$ とする。

$h^0$ は $(\Delta_n, s_{n-1} \cdots s_0 \Delta_0) \in (\Delta[n] \times \Delta[0])_n$ の像により決まる。そこで，

$$h^0(\Delta_n, s_{n-1} \cdots s_0 \Delta_0) = (x, y) \in (X \times Y)_n$$

とおく。$\Delta[n] \times \Delta[1]$ の非退化 $(n+1)$–単体は，

$$(s_j \Delta_n, s_n \cdots s_{j+1} s_{j-1} \cdots s_0 \Delta_1) \qquad (0 \leqq j \leqq n)$$

の形の単体であり，その個数は $(n+1)$ 個である。

(2.5) $\qquad h^1(s_j \Delta_n, s_n \cdots s_{j+1} s_{j-1} \cdots s_0 \Delta_1) = (u_j, b_j, v_j) \ \in (X \times B \times Y)_{n+1}$

とおく。図式 (2.3) の可換性より

$$s^0 h^1(s_j \Delta_n, s_n \cdots s_{j+1} s_{j-1} \cdots s_0 \Delta_1) = (u_j, v_j)$$

と

$$\begin{aligned} & h^0 s^0(s_j \Delta_n, s_n \cdots s_{j+1} s_{j-1} \cdots s_0 \Delta_1) \\ &= h^0(s_j \Delta_n, s_n \cdots s_{j+1} s_{j-1} \cdots s_0 s^0 \Delta_1) \\ &= h^0(s_j \Delta_n, s_n \cdots s_{j+1} s_{j-1} \cdots s_0 s_0 \Delta_0) \end{aligned}$$

$$= h^0(s_j\Delta_n, s_n \cdots s_{j+1}s_js_{j-1}\cdots s_0\Delta_0)$$
$$= h^0(s_j\Delta_n, s_js_{n-1}\cdots s_0\Delta_0) = h^0s_j(\Delta_n, s_{n-1}\cdots s_0\Delta_0)$$
$$= s_jh^0(\Delta_n, s_{n-1}\cdots s_0\Delta_0) = (s_jx, s_jy)$$

は等しい。したがって，

(2.6) $$u_j = s_jx\ , \qquad v_j = s_jy \qquad (0 \leqq j \leqq n)$$

である。次に，図式 (2.4) において $k = 0$ の場合の可換性を書いてみる。図式 (2.4) を

下辺右辺とたどると　$d^0h^0(\Delta_n, s_{n-1}\cdots s_0\Delta_0) = d^0(x,y) = (x, f(x), y)$,

左辺上辺とたどると　$h^1d^0(\Delta_n, s_{n-1}\cdots s_0\Delta_0) = h^1(\Delta_n, s_{n-1}\cdots s_0d^0\Delta_0)$

$$= h^1(\Delta_n, s_{n-1}\cdots s_0\partial_0\Delta_1) = h^1(\Delta_n, \partial_0s_n\cdots s_1\Delta_1)$$
$$= h^1(\partial_0s_0\Delta_n, \partial_0s_n\cdots s_1\Delta_1) = \partial_0h^1(s_0\Delta_n, s_n\cdots s_1\Delta_1)$$
$$= \partial_0(u_0, b_0, v_0) = (\partial_0u_0, \partial_0b_0, \partial_0v_0)$$

同様に，図式 (2.4) において $k = 1$ の場合の可換性については，

下辺右辺とたどると　$d^1h^0(\Delta_n, s_{n-1}\cdots s_0\Delta_0) = d^1(x,y) = (x, g(y), y)$,

左辺上辺とたどると　$h^1d^1(\Delta_n, s_{n-1}\cdots s_0\Delta_0)$

$$= h^1(\Delta_n, s_{n-1}\cdots s_0d^1\Delta_0) = h^1(\Delta_n, s_{n-1}\cdots s_0\partial_1\Delta_1)$$
$$= h^1(\Delta_n, \partial_{n+1}s_{n-1}\cdots s_0\Delta_1) = h^1(\partial_{n+1}s_n\Delta_n, \partial_{n+1}s_{n-1}\cdots s_0\Delta_1)$$
$$= \partial_{n+1}h^1(s_n\Delta_n, s_{n-1}\cdots s_0\Delta_1) = \partial_{n+1}(u_n, b_n, v_n)$$
$$= (\partial_{n+1}u_n, \partial_{n+1}b_n, \partial_{n+1}v_n)$$

となる。以上より，次の (2.7) が成り立つことがわかる。

(2.7) $$\partial_0b_0 = f(x), \quad \partial_{n+1}b_n = g(y)$$

$P_X : X \times Y \to X$，$P_Y : X \times Y \to Y$，$P_B : X \times B \times Y \to B$ はそれぞれ射影とする。$P_Bh^1 : \Delta[n] \times \Delta[1] \to B \ \in \mathrm{hom}(\Delta[1], B)_n$ について (2.7) は，

$$\mathrm{hom}(\delta^0, B)(P_Bh^1) = f(x), \qquad \mathrm{hom}(\delta^1, B)(P_Bh^1) = g(y)$$

であることを示している。写像

(2.8) $$H : \mathrm{hom}(\underset{\sim}{\Delta}, X \underset{\sim}{\times}_B Y) \longrightarrow X \times_B \mathrm{hom}(\Delta[1], B) \times_B Y$$

を，$h : \Delta[n] \times \underset{\sim}{\Delta} \to X \underset{\sim}{\times}_B Y \in \mathrm{hom}(\underset{\sim}{\Delta}, X \underset{\sim}{\times}_B Y)_n$ に対して

$$H(h) = (P_Xh^0(\Delta_n, s_{n-1}\cdots s_0\Delta_0), P_Bh^1, P_Yh^0(\Delta_n, s_{n-1}\cdots s_0\Delta_0))$$

により定義する。

逆に，$X \times_B \mathrm{hom}(\Delta[1], B) \times_B Y$ の任意の元は (2.1)，(2.2) に記されている写像 $h^1$，$h^0$ を定め，それらが図式 (2.3)，(2.4) の可換性を満たすことは明らかである。このときの (2.8) における $H$ が全単射であることをいうためには，写像 $h^1$，$h^0$ から $h \in \mathrm{hom}(\underset{\sim}{\Delta}, X \underset{\sim}{\times}_B Y)$ が一意的に構成されることを示す必要がある。以下ではこのことを示す。

さて，図式 (2.3)，(2.4) の可換性を満たすような (2.1)，(2.2) に記されている半単体複体の

写像 $h^1$，$h^0$ が与えられたとする。それらの写像について，さらに (2.6)，(2.7) が満たされているとする。$q \geqq 1$，$0 \leqq k \leqq q$ とし，次の図式 (2.9) を考える

(2.9)
$$\begin{array}{ccc}
\Delta[n]\times\Delta[q+1] & \xrightarrow{h^{q+1}} & X\times\overbrace{B\times\cdots\times B}^{q+1\text{ 個の }B}\times Y \\
{\scriptstyle s^k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s^k} \\
\Delta[n]\times\Delta[q] & \xrightarrow{h^{q}} & X\times\underbrace{B\times\cdots\times B}_{q\text{ 個の }B}\times Y
\end{array}$$

集合 $A^{n,q}$，$\bar{A}^{n,q}$ を，$n+q$ 個の要素からなる集合 $\{0,1,\cdots,n+q-1\}$ の分割とし，$A^{n,q}$ は $q$ 個の要素を含み，$\bar{A}^{n,q}$ は $n$ 個の要素を含み，$A^{n,q}\cap\bar{A}^{n,q}=\varnothing$ とする。$A^{q,n}=\{j'_1,\cdots,j'_q\}$，$\bar{A}^{n,q}=\{i'_1,\cdots,i'_n\}$，$(j'_1<\cdots<j'_q$，$i'_1<\cdots<i'_n)$ とする。退化作用素の合成 $s_{A^{n,q}}$，$s_{\bar{A}^{n,q}}$ を次のように約束する。

$$s_{A^{n,q}}=s_{j'_q}\cdots s_{j'_1},\qquad s_{\bar{A}^{n,q}}=s_{i'_n}\cdots s_{i'_1}$$

このとき，$q=1$ の場合 (2.6) が成り立つことを出発点として，帰納的に次の (2.10) が成り立つことを仮定する。

(2.10)　$P_X h^q(s_{A^{n,q}}\Delta_n, s_{\bar{A}^{n,q}}\Delta_q)=s_{A^{n,q}}x,\qquad P_Y h^q(s_{A^{n,q}}\Delta_n, s_{\bar{A}^{n,q}}\Delta_q)=s_{A^{n,q}}y$

集合 $A^{n,q+1}$，$\bar{A}^{n,q+1}$ を，$n+q+1$ 個の要素からなる集合 $\{0,1,\cdots,n+q\}$ の分割とし，$A^{n,q+1}$ は $q+1$ 個の要素を含み，$\bar{A}^{n,q+1}$ は $n$ 個の要素を含むとする。ただし，$A^{n,q+1}\cap\bar{A}^{n,q+1}=\varnothing$ とする。$A^{n,q+1}=\{j_1,\cdots,j_{q+1}\}$，$\bar{A}^{n,q+1}=\{i_1,\cdots,i_n\}$，$(j_1<\cdots<j_{q+1}$，$i_1<\cdots<i_n)$ とする。記号 $s_{A^{n,q+1}}$，$s_{\bar{A}^{n,q+1}}$ を上記と同様に約束して用いる。このとき，図式 (2.9) の可換性から次の補助定理に述べる (2.11) および (2.12) が $k$ の値にかかわらず得られる。

**補助定理**　(2.10) の仮定のもとで次の (2.11)，(2.12) が導かれる。

(2.11)　$$P_X h^{q+1}(s_{A^{n,q+1}}\Delta_n, s_{\bar{A}^{n,q+1}}\Delta_{q+1})=s_{A^{n,q+1}}x$$

(2.12)　$$P_Y h^{q+1}(s_{A^{n,q+1}}\Delta_n, s_{\bar{A}^{n,q+1}}\Delta_{q+1})=s_{A^{n,q+1}}y$$

**補助定理の証明**　$k$ を $0\leqq k\leqq q$ を満たす整数とする。図式 (2.9) の左辺の写像 $s^k$ を考える。

$$\begin{aligned}
&s^k(s_{A^{n,q+1}}\Delta_n, s_{\bar{A}^{n,q+1}}\Delta_{q+1})\\
&=(s_{A^{n,q+1}}\Delta_n, s_{\bar{A}^{n,q+1}}s^k\Delta_{q+1})\\
&=(s_{A^{n,q+1}}\Delta_n, s_{\bar{A}^{n,q+1}}s_k\Delta_{q})\\
&=(s_{j_{q+1}}\cdots s_{j_1}\Delta_n, s_{i_n}\cdots s_{i_1}s_k\Delta_q)\qquad\cdots\cdots\ ①
\end{aligned}$$

$i_n\geqq k+n-1$ のときには，$\eta$ を $i_\eta\leqq k+\eta-1$，$i_{\eta+1}>k+\eta$ を満たす整数とすると，

$$s_{i_n}\cdots s_{i_1}s_k=s_{i_n}\cdots s_{i_{\eta+1}}s_{k+\eta}s_{i_\eta}\cdots s_{i_1}$$

となる。$i_n<k+n-1$ のときには $\eta=n$ として，

$$s_{i_n}\cdots s_{i_1}s_k=s_{k+n}s_{i_n}\cdots s_{i_1}=s_{k+\eta}s_{i_n}\cdots s_{i_1}$$

となる。いずれの場合も $k+\eta\in A$ である。したがって，$j_t=k+\eta$ とすると

$$① = s_{k+\eta}(s_{j_{q+1}-1}\cdots s_{j_{t+1}-1}s_{j_{t-1}}\cdots s_{j_1}\Delta_n, s_{i_n-1}\cdots s_{i_{\eta+1}-1}s_{i_\eta}\cdots s_{i_1}\Delta_q)$$

となる。以上から

$$\begin{aligned}
&P_X h^q s^k(s_{A^{n,q+1}}\Delta_n, s_{\bar{A}^{n,q+1}}\Delta_{q+1})\\
&= P_X h^q(s_{k+\eta}(s_{j_{q+1}-1}\cdots s_{j_{t+1}-1}s_{j_{t-1}}\cdots s_{j_1}\Delta_n, s_{i_n-1}\cdots s_{i_{\eta+1}-1}s_{i_\eta}\cdots s_{i_1}\Delta_q))\\
&= s_{k+\eta}P_X h^q(s_{j_{q+1}-1}\cdots s_{j_{t+1}-1}s_{j_{t-1}}\cdots s_{j_1}\Delta_n, s_{i_n-1}\cdots s_{i_{\eta+1}-1}s_{i_\eta}\cdots s_{i_1}\Delta_q)\\
&= s_{k+\eta}s_{j_{q+1}-1}\cdots s_{j_{t+1}-1}s_{j_{t-1}}\cdots s_{j_1}x\\
&= s_{j_{q+1}}\cdots\cdots s_{j_1}x\\
&= s_{A^{n,q+1}}x
\end{aligned}$$

同様にして，

$$P_Y h^q s^k(s_{A^{n,q+1}}\Delta_n, s_{\bar{A}^{n,q+1}}\Delta_{q+1}) = s_{A^{n,q+1}}y$$

であることが示される。　　　　**補助定理の証明終わり**

$q \geqq 2$ とする。$\left(b_{A^{n,q}}\right)_j \in B_{n+q}$　$(1 \leqq j \leqq q)$ を次の (2.13) 式により決まる単体とする。

$$\begin{aligned}
\left(b_{A^{n,q}}\right)_j &= P_B h^1\left(s_{A^{n,q}}\Delta_n, s_{\bar{A}^{n,q}}s^0\cdots s^{j-2}\widehat{s^{j-1}}s^j\cdots s^{q-1}\Delta_q\right)\\
&= P_B h^1\left(s_{A^{n,q}}\Delta_n, s_{\bar{A}^{n,q}}s_{q-1}\cdots s_j\widehat{s_{j-1}}s_{j-2}\cdots s_0\Delta_1\right)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

ここで，$\widehat{s^{j-1}}$，$\widehat{s_{j-1}}$ は写像の合成からその写像は除かれることを表す。(2.13) を用いて $h^q : \Delta[n]\times\Delta[q] \to X\times B\times\cdots\times B\times Y$ を

$$h^q(s_{A^{n,q}}\Delta_n, s_{\bar{A}^{n,q}}\Delta_q) = \left(s_{A^{n,q}}x, \left(b_{A^{n,q}}\right)_1, \cdots, \left(b_{A^{n,q}}\right)_q, s_{A^{n,q}}y\right) \tag{2.14}$$

により定義する。(2.14) により，$h^1$，$h^0$ が与えられるとき，$\mathrm{hom}(\underset{\sim}{\Delta}, X\underset{\sim}{\times}_B Y)$ の元が一意的に構成される。

## Ⅲ．おわりに

Ⅰ節の補題に対して，Ⅱ節に記したような計算を行うまでもなく，同型写像が (2.14) の具体的な形として見えるのが当然と思える。そうでなかったのは筆者の未熟さのゆえである。（余）面作用素および（余）退化作用素の間に成り立つ関係から，様々な図形的操作を定式化できるところを，それは技術的な面ではあるが，集中して見ている。その意味から，(2.11)，(2.12) に定式化されているような整った形が導かれたことが本資料を書くきっかけであった。

## 参考文献

1) J.P. May, “Simplicial Objects in Algebraic Topology”, D.Van Nostrand Company, Inc. (1967)
2) A.K. Bousfield, D.M. Kan, “Homotopy Limits, Completions and Localizations”, LNM 304, Springer-Verlag (1972)